

Une application du théorème de Tchebycheff

Ivan Nourdin, université de Nancy

15 novembre 2001

Mot-clé: nombre premier.

Rappelons le théorème de Tchebycheff (voir [Gou] page 43) :

Théorème.

Si n est un entier ≥ 4 , alors il existe au moins un nombre premier p vérifiant $n < p < 2n - 2$.

En voici une jolie application.

Question. Pour quels $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $\sqrt{n!} \in \mathbb{N}$?

Réponse. $n = 0$ ou 1 .

Démonstration. Montrons que $n!$ n'est pas un carré si $n \geq 2$. Pour $n = 2$, c'est clair ! Supposons donc $n \geq 3$ et appelons p le plus grand nombre premier divisant $n!$. Du théorème de Tchebycheff, on tire l'existence d'un nombre premier q compris entre $p + 1$ et $2p$. On en déduit que $2p$ est plus grand que n (sinon, q contredirait la maximalité de p). Ainsi, p^2 ne divise pas $n!$ et $n!$ n'est pas un carré.■.

Bibliographie.

[Gou] Xavier Gourdon, Les maths en tête, volume algèbre, Ellipses, 1994