# DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL ADMETTANT UNE FAMILLE GÉNÉRATRICE FINIE
# RANG D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Notations :

Dans tout l'exposé, on considérera, sauf mention contraire, que les familles sont constituées d'éléments distincts et que modifier l'ordre des éléments ne modifie pas la famille. Ceci nous permettra de faire l'identification suivante :

$$\text{Famille } (x_i)_{i\in I} \iff \text{Partie } \{x_i,\ i \in I\}$$

Cette identification rend légitime les notations suivantes ;

- Si $S$ est une sous-famille de $F$, on notera $S \subset F$. Si $S$ est une sur-famille de $F$, on notera $F \subset S$.
- Si $F = (x_i)_{i\in I}$ possède un nombre fini d'éléments, on posera Card $L$ = Card $\{x_i,\ i \in I\}$

## I. Base et dimension

Définition 1

On appelle espace vectoriel de dimension finie tout espace vectoriel possédant une famille génératrice finie. (Dans le cas contraire, on dit que l'espace vectoriel est de dimension infinie)

Théorème 1

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $G$ une famille génératrice finie de $E$ et $L$ une sous famille finie de $G$ qui est libre. Alors il existe une base $B$ de $E$ telle que $L \subset B \subset G$.

Rappelons qu'une famille $B$ de $E$ est une base si elle libre et génératrice ou de manière équivalente si elle est libre maximale (i.e. toute sur famille $B'$ de $B$ est liée).

Démonstration :

Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des familles libres $X$ de $E$ telles que $L \subset X \subset G$. $\mathcal{L}$ est non vide ($L \in \mathcal{L}$) et est fini ($G$ l'est). De plus, tout famille $X$ de $\mathcal{L}$ possède un nombre fini d'éléments. Nous pouvons donc choisir dans $\mathcal{L}$ une famille $B$ qui possède un nombre maximum d'éléments.

Par construction, $B$ est libre et $L \subset B \subset G$. Montrons que $B$ est génératrice :

Soit $g \in G$.

Si $g \in B$ alors $G \subset B$ donc $B$ est génératrice.

Si $g \notin B$ alors la sur-famille $B \cup \{g\}$ est encore comprise entre $L$ et $G$ et comporte strictement plus d'éléments que $B$, donc n'est pas libre (elle n'appartient pas à $\mathcal{L}$). Elle est donc liée. Or, $B$ est libre. On a donc $g \in \text{Vect}(B)$. D'où $G \subset \text{Vect}(B)$, donc $\text{Vect}(G) \subset \text{Vect}(B)$ i.e. $E \subset \text{Vect}(B)$ donc $B$ engendre $E$.

Corollaire 1

Dans un espace vectoriel de dimension finie, de toute famille génératrice $G$, on peut extraire une base.

Démonstration : on applique le théorème 1 avec $L = \varnothing \subset G$ qui est libre.

Corollaire 2

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute famille libre $L$ peut être complétée en une base.

Démonstration : Soit $G$ une famille génératrice finie, on applique alors le théorème avec $G \cup L$ qui est encore génératrice.

Lemme d'échange de Steinitz

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $X = (e_1, e_2, \dots , e_n)$ une famille de vecteurs de $E$. Soient $x$ et $y$ deux vecteurs de $E$ tels que : $$y = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n + \lambda x \text{ avec } \lambda \neq 0$$

Alors $$x = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n + \mu y \quad \text{c'est-à-dire} \quad x \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots , e_n, y)$$

Démonstration : Évident : $\mu_i = -\dfrac{\lambda_i}{\lambda}$ et $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$.

Théorème 2

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $G$ une famille génératrice finie de $E$. Soit $L$ une famille libre de $E$. Alors $L$ est finie et Card $L \leqslant$ Card $G$.

Démonstration :

Si $G = \varnothing$ alors $E = \varnothing$ et donc $L = \varnothing$, le théorème est donc vrai.

Pour la suite, on suppose que card $G \geqslant 1$. Raisonnons par l'absurde, supposons que Card $L >$ Card $G$.

Soit $G = (g_1, g_2, \dots , g_m)$ et $L = (\ell_1, \ell_2, \dots , \ell_n)$ avec $n > m$.

Étape 1 :

Comme $L$ est libre, $\ell_1$ est non nul. Comme $G$ est génératrice, $\ell_1 = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_m g_m$.

Comme $\ell_1$, est non nul, au moins un des $\lambda_i$ est non nul. Quitte à modifier l'ordre des $g_i$, on peut supposer que c'est $\lambda_1$. D'après le lemme d'échange, on a donc : $g_1 \in \mathrm{Vect}(\ell_1 ; g_2 ; \dots ; g_m)$.

Posons $G_1 = (\ell_1 ; g_2 ; \dots ; g_m)$. Comme $g_1 \in \mathrm{Vect}(G_1)$, on a $\mathrm{Vect}(G_1) = E$.

Étape 2 :

Soit $\ell_2$ un autre élément de $L$ distinct de $\ell_1$. ($\ell_2$ existe puisque par hypothèse, $n > m \geqslant 1$)

Comme $G_1$ est génératrice, on a : , $\ell_2 = \mu_1 \ell_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_m g_m$.

Les scalaires $\lambda_i$ pour $i \in [\![ 2 ; m ]\!]$ ne sont pas tous nuls sinon $L$ serait liée (puisque $\ell_1$ et $\ell_2$ seraient colinéaires).

Supposons (quitte à modifier l'ordre des $g_i$ pour $i \in [\![ 2 ; m ]\!]$) que $\lambda_2 \neq 0$. D'après le lemme d'échange, on a donc :

$$g_2 \in \mathrm{Vect}(\ell_1 ; \ell_2 ; g_3 ; \dots ; g_m)$$

Posons $G_2 = (\ell_1 ; \ell_2 ; g_3 ; \dots ; g_m)$. Comme $g_2 \in \mathrm{Vect}(G_2)$, on a aussi $g_1 \in \mathrm{Vect}(G_1)$ donc $\mathrm{Vect}(G_2) = E$

Bilan : à la $m^{\text{ième}}$ étape, nous aurons formé une famille génératrice $G_m = (\ell_1, \ell_2, \dots , \ell_m)$ ne comportant que des éléments de $L$. Or, Card $L >$ Card $G$, on peut donc choisir dans $L$ un élément $\ell_{m+1}$ qui n'est pas dans $G_m$. Mais, comme $G_m$ est génératrice, on a : $\ell_{m+1} = \alpha_1 \ell_1 + \alpha_2 \ell_2 + \dots + \alpha_m \ell_m$ donc $L$ est liée, d'où la contradiction.

Conclusion : Card $L \leqslant$ Card $G$.

Corollaire 3

Dans un espace vectoriel $E$ de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

Démonstration :

Soient $B$ et $B'$ deux bases de $E$. D'après le théorème 2 :

Card $B \leqslant$ Card $B'$ car $B$ est libre et $B'$ est génératrice

Card $B' \leqslant$ Card $B$ car $B'$ est libre et $B$ est génératrice

Définition 2

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle dimension de $E$ le nombre de vecteurs de l'une quelconque de ses bases. On note $\dim E$ ou $\dim_{\mathbb{K}} E$.

## II. Théorèmes classiques en dimension finie

Théorème 3

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ sur un corps $\mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $B$ est une base de $E$
2. $B$ est libre et Card $B = n$
3. $B$ est génératrice et Card $B = n$

Démonstration :

$1 \Rightarrow 2$ et $1 \Rightarrow 3$: évident par définition d'une base et de la dimension

$2 \Rightarrow 1$ : puisque $B$ est libre, on peut la compléter en une base qui doit avoir $n$ éléments donc $B$ est déjà une base.

$3 \Rightarrow 1$ : puisque $B$ est génératrice, on peut extraire une base qui doit avoir $n$ éléments donc $B$ est déjà une base.

Théorème 4

Soient $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ sur un corps $\mathbb{K}$ et $F$ un sous espace vectoriel de $E$. Alors :

- $F$ est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$ avec égalité si et seulement si $F = E$
- $F$ possède un supplémentaire dans $E$.

Démonstration :

- D'après le théorème 2, toute famille libre $L$ de $F$ (de donc de $E$) est telle que Card $L \leqslant n$. Ce sera donc valable aussi pour une famille libre maximale (c'est-à-dire une base) donc $\dim F \leqslant \dim E$.

  Si $\dim F = \dim E$ alors toute base $B$ de $F$ (qui est une famille libre de $E$) possède $n$ éléments. D'après le théorème 3, $B$ est une base de $E$. Soit $e \in E$ ; $e$ est une combinaison linéaire d'éléments de $B$ qui est une base de $F$, donc $e \in F$. On a donc $E \subset F$ et par suite $E = F$. Enfin, si $E = F$ alors clairement $\dim E = \dim F$.
- Soit $B = (b_1 ; b_2 ; ... ; b_m)$ une base de $F$ ($m = \dim F$ et $m \leqslant n$). $B$ est une famille libre de $E$. On peut donc la compléter par une famille $C = (c_1 ; c_2 ; ... ; c_p)$ de façon que $B \cup C$ soit une base de $E$. Montrons que $G = \text{Vect}(C)$ est un supplémentaire de $F$ :

  Soit $x \in E$. On a $x = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + ... + \beta_m b_m + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + ... + \gamma_p c_p$ (écriture unique car $B \cup C$ base de $E$)

  C'est-à-dire $x = u + v$ avec $u \in \text{Vect}(B) = F$ et $v \in \text{Vect}(C) = G$

  $(u = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + ... + \beta_m b_m$ et $v = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + ... + \gamma_p c_p)$.

Donc $E = F + G$ et comme la décomposition de $x$ sur $B \cup C$ est unique, la somme est directe : $E = F \oplus G$, donc $G$ est un supplémentaire de $F$.

Théorème 5

1. Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension $n$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ .
2. Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors $E$ et $F$ sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$.

Démonstration :

1. Soit $B = (x_1, x_2, \dots , x_n)$ une base de $E$.

   L'application $\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow E$

   $$(\lambda_1, \lambda_2, \dots , \lambda_n) \longmapsto \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$ est un isomorphisme d'espace vectoriel :

   $\varphi$ est clairement linéaire. En outre, $\varphi$ est injective (car $B$ est libre) et surjective (car $B$ est génératrice).
2. Soit $\phi : E \longrightarrow F$ un isomorphisme. Soit $B$ une base de $E$. On sait que $\phi(B)$ est une base de $F$. Or, $\mathrm{Card}(\phi(B)) = \mathrm{Card}(B)$ car $\phi$ est injective. Donc $\dim E = \dim F$. Réciproquement, si $\dim E = \dim F = n$, alors $E$ et $F$ sont (d'après 1) isomorphes à $\mathbb{K}^n$ donc (par transitivité) isomorphes entre eux.

Théorème 6 Dimension d'un produit, d'une somme directe.

1. Soient $E_1$ et $E_2$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors

   $E_1 \times E_2$ est de dimension finie et $\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$
2. Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $E_1$ et $E_2$ sont deux sous espaces vectoriels de $E$ dont la somme est directe alors : $\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$.

Démonstration :

Notons $m = \dim E_1$ et $n = \dim E_2$.

1. D'après le théorème 5, $E_1 \cong \mathbb{K}^m$ et $E_2 \cong \mathbb{K}^n$ donc $E_1 \times E_2 \cong \mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n$. En outre, $\mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^n \cong \mathbb{K}^{m+n}$ d'où le résultat.

   On peut également vérifier que si $(x_1, x_2, \dots , x_m)$ est une base de $E_1$ et si $(y_1, y_2, \dots , y_n)$ une base de $E_2$, le $n+m$-uplet $((x_1, 0), (x_2, 0), \dots ,(x_m, 0), (0, y_1), (0, y_2), \dots , (0, y_n))$ est une base de $E_1 \times E_2$.
2. Soient $B_1$ une base de $E_1$ et $B_2$ une base de $E_2$. Comme $E_1$ et $E_2$ sont en somme directe, on a d'une part, $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ et d'autre part, $B_1 \cup B_2$ base de $E_1 \oplus E_2$. Et comme $B_1 \cup B_2$ possède $m + n$ éléments, le résultat s'en suit.

Cas particulier : si $E_1$ et $E_2$ sont supplémentaires alors $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$

Conséquence : tous les supplémentaires ont même dimension.

## III. Rang d'une application linéaire

Rappel de quelques résultats sur les applications linéaires (valables en dimension quelconque) :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où $E$ et $F$ sont deux espaces vectoriels quelconques.

1. L'image par $f$ de toute famille liée de $E$ est une famille liée de $F$.
2. L'image par $f$ de toute famille génératrice de $E$ est une famille génératrice de $F$ si et seulement si $f$ est surjective.
3. L'image par $f$ de toute famille libre de $E$ est une famille de $F$ si et seulement si $f$ est injective
4. L'image par $f$ de toute base de $E$ est une base de $F$ si et seulement si $f$ est un isomorphisme de $E$ sur $F$

Preuve :

Ces propriétés reposent essentiellement sur la linéarité de $f$ :

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \;\Rightarrow\; f(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i)$$

1. Soit $S$ une famille liée de $E$. Alors, il existe $j \in I$ tel que $x_j$ soit combinaison linéaire des autres vecteurs de $S$ : $x_j = \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} \lambda_i x_i$ . Et, en vertu de ce qui précède, le vecteur image $f(x_j)$ est combinaison linéaire des autres vecteurs images. Donc la famille $f(S)$ est liée.
2. Supposons $f$ surjective et soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de $E$. Donc pour tout $x \in E$, on a la décomposition : $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ . Soit $y \in F$. Comme $f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a donc : $y = f(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i)$ . Donc la famille $(f(x_i))_{i \in I}$ est génératrice de $F$.

   Réciproquement, si l'image par $f$ de toute famille génératrice de $E$ est une famille génératrice de $F$ alors $f$ est clairement surjective.
3. Supposons $f$ injective et soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille libre de $E$. Considérons une combinaison linéaire nulle de la famille $(f(x_i))_{i \in I}$ : $\sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i) = 0$. Ce qui s'écrit encore : $f(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i) = 0$. Comme $f$ injective ($\operatorname{Ker} f = \{0\}$), on a $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$, et comme $(x_i)_{i \in I}$ est libre, $\lambda_i = 0$. Donc la famille $(f(x_i))_{i \in I}$ est libre.

   Réciproquement, supposons que l'image par $f$ de toute famille libre de $E$ est une famille de $F$. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. La famille $(x)$ a donc pour image la famille $(0)$ qui est une famille liée. La famille $(x)$ ne peut donc être libre (sinon son image serait, par hypothèse libre, ce qui n'est pas le cas), elle est donc liée, d'où $x = 0$ et par suite $f$ est injective.
4. Conséquence immédiate de 2 et 3.

Une application linéaire est entièrement déterminée dès que l'on connaît les images des vecteurs d'une base :

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $(x_i)_{i\in I}$ une base de $E$ et $(y_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de vecteurs de $F$ (indexée par la même ensemble d'indices $I$). Il existe une unique application linéaire $f$ de $E$ dans $F$ telle que :

$$f(x_i) = y_i \quad \forall i \in I.$$

Preuve :

Soit $x \in E$. Comme $(x_i)_{i\in I}$ est une base de $E$, il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ tels que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ .

Construisons l'application de $E$ dans $F$ définie par $f(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i y_i$ . Ainsi, on a bien :

- $f(x_i) = y_i \ \ \forall i \in I$ car les coordonnées $\lambda_i$ de $x_i$ relativement à la base $(x_i)_{i\in I}$ sont toutes nulles sauf $\lambda_i = 1$
- $f$ linéaire : soient $x', x'' \in E$ de coordonnées respectives ($\lambda_i^{'}$) et ($\lambda_i^{''}$) et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On a :

$$f(x') + \alpha f''(x'') = \sum_{i\in I} \lambda_i^{'} y_i + \alpha \sum_{i\in I} \lambda_i^{''} y_i = \sum_{i\in I} \left(\lambda_i^{'} + \alpha\lambda_i^{''}\right) y_i = \sum_{i\in I} \lambda_i y_i \ = f(x' + \alpha x'')$$

car les coordonnées $\lambda_i$ de $x' + \alpha x''$ sont égales à $\lambda_i^{'} + \alpha \lambda_i^{''}$ .

Unicité : S'il existent $f$ et $g \in \mathcal{L}(E, F)$ telles que $f(x_i) = g(x_i) \ \ \forall i \in I$, alors pour tout $x \in E$, on a $(f - g)(x) = 0$ donc $f = g$.

Définition 3

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle rang de $f$ la dimension de l'image de $f$ :

$$\mathrm{rg}\, f = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, f$$

Remarque : $\mathrm{Im}\, f$ est dimension finie, donc $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, f$ a bien un sens !

Théorème 7  Théorème du rang

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a la relation :

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{rg}\, f$$

Démonstration :

Rappelons le résultat fondamental suivant :

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, f$ est isomorphe à $\mathrm{Im}\, f$.

Prouvons ce résultat : soit $U$ un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, f$ : $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus U$ (et donc $\mathrm{Ker}\, f \cap U = \{0\}$)

Considérons l'application linéaire $f_{|U} : U \longrightarrow \mathrm{Im}\, f$. Par construction, $f_{|U}$ est surjective. Elle est également injective : $\forall x, y \in U$, $f_{|U}(x) = f_{|U}(y) \Rightarrow x - y \in \mathrm{Ker}\, f$. Et comme $\mathrm{Ker}\, f \cap U = \{0\}$, on a $x = y$. Donc $f_{|U}$ est un isomorphisme.

Démontrons maintenant le théorème du rang :

Soit $U$ un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, f$ : $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus U$ . D'après le théorème 6, on a : $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim U$.

Et en vertu de ce qui précède ($\dim U = \dim \mathrm{Im}\, f$), il vient : $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f$.

Remarque : attention, le théorème 7 ne dit pas que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im}\, f$. Considérer $f$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à $(x, y)$ associe $(y, 0)$. On a $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}e_1$ où $e_1 = (1, 0)$.

Corollaire 4

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a :

1. $\mathrm{rg}(f) \leqslant \inf(\dim E, \dim F)$
2. $f$ injective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}\, f = \dim E$
3. $f$ surjective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}\, f = \dim F$

Démonstration :

1. Comme $\mathrm{rg}\, f = \dim E - \dim \mathrm{Ker}\, f$, on a, d'une part : $\mathrm{rg}\, f \leqslant \dim E$. En outre, $\mathrm{Im}\, f \subset F$, donc $\mathrm{rg}\, f \leqslant \dim F$ (théorème 4)
2. $f$ injective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Ker}\, f = 0$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}\, f = \dim E$
3. $f$ surjective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\, f = F$ $\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim F$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}\, f = \dim F$

Application du théorème du rang : autre démonstration de la formule de Grassmann :

Si $F$ et $G$ sont deux sous espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie, alors :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Démonstration classique :

Soit $H$ un supplémentaire de $F \cap G$ dans $F$. On a donc $F = (F \cap G) \oplus H$.

Montrons que $F + G = H \oplus G$ :

$H \cap G = (H \cap F) \cap G = H \cap (F \cap G) = \{0\}$ puisque $H$ et $F \cap G$ sont en somme directe.

$H + G \subset F + G$ puisque $H \subset F$

$F + G \subset H + G$ : en effet, soit $x \in F + G$, alors $x = f + g$ (où $f \in F$ et $g \in G$). Or $F = (F \cap G) \oplus H$, donc $f = g' + h$ (où $g' \in F \cap G$ et $h \in H$) et finalement $x = (g + g') + h \in H + G$.

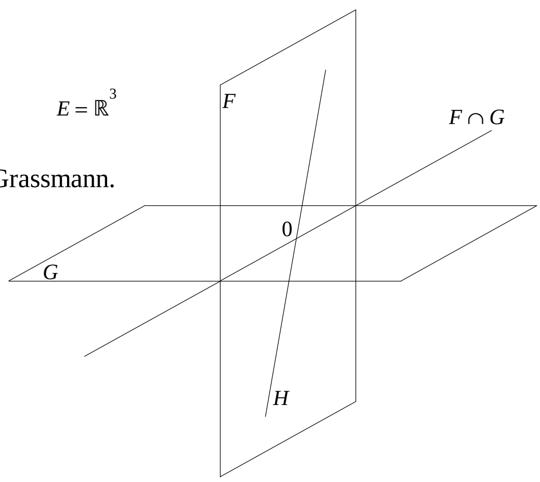
On a donc $H \cap G = \{0\}$ et $H + G = F + G$ donc $F + G = H \oplus G$.

Appliquons maintenant le théorème 6 :

$F = (F \cap G) \oplus H$ donc $\dim F = \dim(F \cap G) + \dim H$

$F + G = H \oplus G$ donc $\dim(F + G) = \dim H + \dim G$

En additionnant les deux dernières relations, on obtient la formule de Grassmann.




Démonstration à l'aide du théorème du rang :

Considérons l'application suivante :

$$\varphi : \begin{array}{l} F \times G \longrightarrow E \\ (f, g) \longmapsto f + g \end{array}$$

$\varphi$ est clairement linéaire et $\mathrm{Ker}\, \varphi = \{(f, g) \in E \times F \text{ tels que } f + g = 0\}$

Montrons que $\mathrm{Ker}\, \varphi \cong F \cap G$ : considérons l'application

$$\psi : \begin{array}{l} F \cap G \longrightarrow F \times G \\ \quad f \quad \longmapsto (f, -f) \end{array}$$

L'application $\psi$ est clairement linéaire et injective.

De plus, $\mathrm{Im}\, \psi = \{(f, -f) \in F \times G\} = \{(f, g) \in F \times G \text{ tels que } f + g = 0\} = \mathrm{Kef}\, \varphi$.

Donc $\mathrm{Ker}\, \varphi \cong F \cap G$.

En outre, $\text{Im } \varphi = F + G$.

Appliquons le théorème du rang à $\varphi$, il vient : $\dim(F \times G) = \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim(F \cap G) + \dim(F + G)$.

Et comme d'après le théorème 6, $\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$, on obtient la formule de Grassmann.

<u>Théorème 8</u> Rang d'une composée

Soient $E$, $F$ et $G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors :

1. $\text{rg}(g \circ f) \leqslant \inf(\text{rg } f, \text{rg } g)$
2. Si $f$ est surjective, alors $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } g$
3. Si $g$ est injective, alors $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } f$

<u>Démonstration</u> :

On a toujours $\text{Ker } f \subset \text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$ d'où $\text{Dim Ker } f \leqslant \dim \text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{rg}(g \circ f) \leqslant \text{rg } g$.

1. Le théorème du rang appliqué à $f$, puis à $g \circ f$ donne :

   $$\dim \text{Ker } f = \dim E - \text{rg } f \quad \text{et} \quad \dim \text{Ker}(g \circ f) = \dim E - \text{rg}(g \circ f)$$

   D'où $\text{rg}(g \circ f) \leqslant \text{rg } f$

   Et finalement, $\text{rg}(g \circ f) \leqslant \inf(\text{rg } g, \text{rg } f)$
2. Si $f$ est surjective, alors $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$ d'où $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } g$.
3. Si $g$ est injective, alors $\text{Ker } f = \text{Ker}(g \circ f)$ d'où $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg } f$.

<u>Théorème 9</u>

Soient $E$, $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension $n$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

1. $f$ est un isomorphisme de $E$ sur $F$
2. $f$ est injective
3. $\text{rg } f = n$
4. $f$ est surjective
5. $f$ est inversible à gauche, i.e., $\exists g \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$.
6. $f$ est inversible à droite, i.e., $\exists h \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $f \circ h = \text{Id}_F$.

<u>Démonstration</u> :

$1 \Rightarrow 2$ : trivial

$2 \Rightarrow 3$ : si $f$ est injective, alors $\text{Ker } f = \{0\}$ et d'après le théorème du rang, $\text{rg } f = n$

$3 \Rightarrow 4$ : si $\text{rg } f = n$, alors $\text{Im } f = F$ donc $f$ est surjective

$4 \Rightarrow 5$ et $6$ : si $f$ est surjective, alors $\text{Im } f = F$, donc $\text{rg } f = n$ et d'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker } f = 0$, c'est-à-dire $\text{Ker } f = \{0\}$, donc $f$ est bijective d'où 5 et 6.

$5$ ou $6 \Rightarrow 1$ : Si $f$ est inversible à gauche, alors ($g \circ f$ étant surjective) $f$ est injective, et d'après ce qui précède bijective d'où 1. Si $f$ est inversible à droite, alors ($f \circ h$ étant injective) $f$ est surjective, et d'après ce qui précède bijective d'où 1.

Exercice :

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f$, $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $g \circ f$ est injective
2. $g \circ f$ est surjective
3. $f$ et $g$ sont bijectives

Solution :

On a clairement $3 \Rightarrow 1$ et $3 \Rightarrow 2$.

Montrons que 1 ou $2 \Rightarrow 3$ : Puisque $g \circ f \in \mathcal{L}(E)$, 1 ou 2 entraîne $g \circ f$ bijective d'où $f$ injective et $g$ surjective, et comme $f$, g $\in \mathcal{L}(E)$, on a 3.

Remarque : attention, l'équivalence : $f$ bijective $\Leftrightarrow$ $f$ injective $\Leftrightarrow$ $f$ surjective n'est plus vraie en dimension quelconque. Prendre par exemple :

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ qui à $P$ associe $P'$. On a $f$ surjective mais non injective.

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ qui à $P$ associe $XP$. On a $f$ injective mais non surjective.