Leçon 116 : Sommes et sommes directes de sev d'un ev - Applications

Prérequis : ev, sev ,bases,dim

I) Definition

Définition 1.

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \prod_{p=1}^{n} E_p & \longrightarrow & E \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \longmapsto & \sum_{p=1}^{n} x_p \end{array} \text{ est lineaire.}$$

$Im\varphi$ est un sous-ev de E. On le note $\sum_{p=1}^{n} E_p$.

Théorème 1.
$\sum_{p=1}^{n} E_p$ est le plus petit sous-ev contenant $\bigcup_{p=1}^{n} E_p$.

Définition 2.
Si φ est injective, on dit que la somme $\sum_{p=1}^{n} E_p$ est directe et on note $\bigoplus_{p=1}^{n} E_p$.

Théorème 2. *On a l'équivalence :*

(i) $\sum_{p=1}^{n} E_p = \bigoplus_{p=1}^{n} E_p$

(ii) $\forall x \in \sum_{p=1}^{n} E_p, \exists!(x_1, x_2, ...x_n) \in \prod_{p=1}^{n} E_p$ *tel que* $x = \sum_{p=1}^{n} x_p$

(iii) $\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \prod_{p=1}^{n} E_p$, $\sum_{p=1}^{n} x_p = 0 \Rightarrow x_p = 0 \ \forall p$

Exemple :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$
Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ ses valeurs propres 2 à 2 distinctes et soit E_{λ_i} l'espace propre associé à λ_i
Alors $\sum_{p=1}^{N} E_{\lambda_p} = \bigoplus_{p=1}^{N} E_{\lambda_p}$

II) Sous-ev supplémentaires

Propriété 1. *On a l'équivalence suivante :*
(i) $E = F \oplus G$
(ii) $E = F + G$ *et* $F \cap G = \{0\}$
(iii) $\forall x \in E, \exists!(x_1, x_2) \in F \times G$ *tel que* $x = x_1 + x_2$

Définition 3.
On dit alors que F et G sont supplémentaires

Exemples :
- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{$fonctions paires$\} \oplus \{$fonctions impaires$\}$
- $\mathbb{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$
- $\forall$ p projecteur de E , E = Ker p $\oplus$ Im p
- $\forall$ s symétrie de E , E = Ker (s-Id) $\oplus$ Ker (s+Id)

Définition 4. *Si $E = F \oplus G$, il existe un unique endomorphisme p de E tel que $p|_F$=0 et $p|_G$ = Id. On l'appelle la projection sur G parallèlement à F.*

Théorème 3. *Soit E un ev de dimension finie n et F un sev de E de dimension m.*
1) F admet un supplémentaire dans E.
2) Tout supplémentaire de F dans E est de dimension n-m.

conséquences :
1) dim(F $\oplus$ G) = dim F + dim G
2) dim (F+G) = dim F + dim G - dim (F $\cap$ G)

III) applications en dimension finie

Application 1 : Théorème du rang

Soit E un ev de dim finie et E' un ev de dimension quelconque. Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$
1)Tout supplémentaire de Ker f est isomorphe à Imf.
2) dim E = dim Ker f + rg f

Application 2 : Th de diagonalisation d'un endomorphism

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ On a l'équivalence de :
(i) f est diagonalisable
(ii)E admet une base formée de vecteurs propres de f
(iii) E = $\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)}$ SEP(f,λ)
(iv) dim E = $\sum_{\lambda \in Sp(f)}$ dim(SEP(f,λ))

Application 3 : Th du supplémentaire orthogonal

Si E est préhilbertien et F un sev de E de dimension finie alors $F \oplus F^{\perp}$ = E

Application 4 : Théorème des noyaux et conséquence
(th valable en dim quelconque)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$
Soit $P_1, P_2, ..., P_n$ dans $\mathbb{K}[X]$ premiers deux à deux.
Alors Ker$((P_1 P_2 ....P_n(f))$ = $\bigoplus_{i=1}^{n}$ Ker$(P_i(f))$

application : décomposition en sous-espaces caractéristiqu

Soit E de dim finie n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
On note sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ SEC(f,λ) = Ker $(f - \lambda Id)^{\mu}$ où μ est l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme minimal de f.
On suppose que le polynôme caractéristique P_f de f est scindé.
Alors E = $\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)}$ SEC(f,λ)