Leçon 117 : Rang en algèbre linéaire (dimension finie)

Prérequis : ev, sev ,bases,dim
Notations : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
Soit E et F $\mathbb{K}$-ev de dimension finie
Soit f,g $\in \mathcal{L}(E, F)$

I) Rang d'un endomorphisme

Définition 1.

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie d'éléments de E. On appelle rang de $\mathcal{F}$, et on note rg($\mathcal{F}$), l'entier naturel dim(Vect($\mathcal{F}$)).

Exemple :
Pour a $\in \mathbb{R}$,on note

$$f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & cos(x+a) \end{array}$$

Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$
Déterminer le rang de $(f_{a_1}, f_{a_2}, f_{a_3})$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ muni des lois usuelles.

Définition 2.
On appelle rang de f, et on note rg(f), l'entier dim(Im f).

Théorème 1.
Im f est isomorphe à E/Ker f

Théorème 2 (th du rang).
E étant de dim finie, on a :
dim E = rg(f) + dim (Ker f)

Attention, cela ne signifie pas que E = Ker f $\oplus$ Im f

Propriété 1.
E étant de dim finie, on a :
$|rg(f) - rg(g)| \leqslant$ *rg(f+g)* $\leqslant$ *rg(f) + rg(g)*

Propriété 2.
i) f injective $\Leftrightarrow$ rg(f) = dim E
ii)f surjective $\Leftrightarrow$ rg(f) = dim F

Exercice :
Si fg=0 et f+g inversible alors rg(f)+rg(g)=dim E

II) rang d'une matrice

Définition 3. *Soit $A \in \mathbb{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.*
On appelle rang de A, et on le note rg(A), le rang de ses vecteurs colonnes.

Propriété 3.
Si A est la matrice d'une application f, on a rg(A)=rg(f).

Propriété 4.
$\forall A \in \mathbb{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *, rg(A) $\leqslant$ min(n,p)*

Propriété 5.
$\forall A \in \mathbb{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *, rg(A)=n $\Leftrightarrow$ $A \in GL_n(\mathbb{K})$*

III) determination et utilisation du ran

1) comment calculer le rang

(i) en utilisant les matrices bordantes
(ii)à l'aide du noyau
(iii) en se ramenant à une matrice J_r par des opérations sur lignes et colonnes
(iv) utiliser la diagonalisation et le th du rang pour établir certaines prop du rang (parité notament)
Exemple. Si A $\in \mathbb{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ tq $A^3 + A^2 + A = 0$, montrer que rg(A)est pair.
2)Utilisation du rang