# ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE

## *Remarques générales*

• "S'il n'est pas exigé de connaître la démonstration de chacun des résultats cités dans le plan, on doit pouvoir en dire quelque chose ; citons quelques exemples de dialogues : —"Les éléments inversibles de L(E) forment un groupe noté GL(E)."—"Que savez-vous de GL(E) ?"—"C'est un groupe ..."." (Rapport du jury 1992)

• Il s'agit d'une leçon sur les endomorphismes, *pas sur les matrices*. Il faut donc énoncer tous les résultats du plan en termes d'endomorphismes, étant bien entendu qu'il faut savoir les traduire matriciellement et que d'autre part il est loisible d'adopter le point de vue matriciel pour les démonstrations.

## *Plan*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps **K** commutatif de caractéristique nulle (**R** ou **C** pour les propriétés topologiques). On note L(E) l'ensemble des endomorphismes de E. On suppose connues les généralités sur les espaces vectoriels de dimension finie et sur les applications linéaires en dimension finie, notamment la représentation matricielle.

### 1. Premières propriétés et exemples

**a) Rang**

Le rang d'un endomorphisme f de E, noté rg f, est la dimension de son image.
On rappelle la formule du rang : $\boxed{\dim E = \dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg} f}$ .
Deux endomorphismes f et g ont même rang ssi il existe des automorphismes $\alpha$ et $\beta$ tels que $f = \alpha \circ g \circ \beta$. On dit que f et g sont équivalents.
S'il existe un automorphisme $\alpha$ tel que $f = \alpha \circ g \circ \alpha^{-1}$, on dit que f et g sont semblables. Il revient au même de dire qu'il existe des bases B et B' dans lesquelles f et g ont respectivement même matrice.

**b) Déterminant**

Soit f un endomorphisme de E. Il existe un unique réel $\lambda$ tel que pour toute base B de E et toute famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E, on ait $\det_B\big(f(x_1),\cdots,f(x_n)\big) = \lambda \det_B(x_1,\cdots,x_n)$. $\lambda$ est appelé déterminant de f et noté det f.
f est un automorphisme ssi $\det f \neq 0$.

**c) Exemples**

• *Homothéties, projections*

| Les endomorphismes qui commutent avec tout endomorphisme sont exactement les homothéties. |
|---|

• *Dilatations, transvections*
Soient H un hyperplan, D une droite supplémentaire de H et $\alpha \in \mathbf{K}^*$. L'application $E = H \oplus D \to E$, $x = y + z \mapsto y + \alpha z$, est appelée dilatation d'hyperplan H, de direction D et de rapport $\alpha$.
Soient H un hyperplan, f une forme linéaire de noyau H et h un vecteur non nul de H. L'application $E \to E, x \mapsto x + f(x)h$, est appelée transvection d'hyperplan H et de direction **K**h.

| Les automorphismes qui fixent chaque vecteur d'un hyperplan H sont exactement les dilatations et les transvections d'hyperplan H. |
|---|

## 2. <u>L'algèbre des endomorphismes</u>

### a) Propriétés algébriques

(L(E), +, . ) est un **K**-espace vectoriel de dimension finie $(\dim E)^2$.
(L(E), +, ∘) est un anneau, en général ni commutatif, ni intègre.
(L(E), +, . , ∘) est une **K**-algèbre, appelée <u>algèbre des endomorphismes</u> de E.

### b) Propriétés topologiques

E étant muni de sa topologie canonique d'espace vectoriel normé (en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes), tous les endomorphismes de E sont continus. La relation $\|f\| = \mathrm{Sup}\{\|f(x)\| \;/\; x \in E \text{ et } \|x\| = 1\}$ définit une norme sur L(E), qui devient de ce fait une algèbre normée ($\|f \circ g\| \le \|f\|\,\|g\|$) complète.
Le déterminant est une application continue de L(E) dans **K**.

*Application :* définition de l'<u>exponentielle</u> d'un endomorphisme.

## 3. <u>Le groupe linéaire</u>

### a) Caractérisation des automorphismes

| Pour un endomorphisme f de E, les propriétés suivantes sont équivalentes : | | |
|---|---|---|
| (i) f est bijectif | (ii) f est injectif | (iii) f est surjectif |
| (iv) f est inversible à droite | (v) f est inversible à gauche | (vi) rg f = dim E |

L'ensemble des automorphismes de E est un groupe, appelé <u>groupe linéaire</u> de E et noté GL(E). C'est le groupe des éléments inversibles de l'anneau L(E).

### b) Propriétés algébriques

GL(E) opère fidèlement et transitivement sur l'ensemble des bases de E.
Le sous-groupe des automorphismes de déterminant 1 est appelé <u>groupe spécial linéaire</u> et noté SL(E).
Si dim E ≥ 2, GL(E) n'est pas commutatif, son centre est le groupe H(E) des homothéties de rapport non nul.
Dans le groupe GL(E), la relation de conjugaison n'est autre que la relation de similitude.

| | |
|---|---|
| SL(E) est engendré par les transvections. | GL(E) est engendré par les dilatations. |

*Application :* calcul du rang d'une matrice, calcul de l'inverse d'une matrice, résolution d'un système linéaire par opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes.

### c) Propriétés topologiques

• GL(E) est un ouvert dense de L(E). L'application $GL(E) \to GL(E),\ f \mapsto f^{-1}$, est continue. SL(E) est un fermé de L(E).
• Si **K** = **C**, GL(E) et SL(E) sont connexes par arcs. Si **K** = **R**, SL(E) est connexe par arcs mais GL(E) n'est pas connexe ; il a deux composantes connexes qui sont connexes par arcs : $GL^+(E) = \{f \in GL(E) \;/\; \det f > 0\}$ et $GL^-(E) = \{f \in GL(E) \;/\; \det f < 0\}$.

## *Bibliographie*

ARNAUDIÈS et FRAYSSE, *Cours de mathématiques, tome 1 : algèbre*, Dunod
AVEZ, *La leçon de géométrie à l'oral de l'agrégation*, Masson
TISSERON, *Géométries affine, projective et euclidienne*, Hermann
TAUVEL, *Mathématiques générales pour l'agrégation*, Masson