OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES LIGNES OU LES COLONNES D'UNE MATRICE. APPLICATIONS

Remarques générales

Les trois livres cités en bibliographie sont, chacun à sa manière, excellents pour préparer ce sujet ; ils contiennent d'autres applications que celles citées ici, ainsi que de nombreux exemples et exercices. Mettre au point quelques exemples numériques et, si possible, des algorithmes.

Plan

1. Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice

a) Principes généraux

• Soit M une matrice de $M_{n,p}(\mathbf{K})$, c'est-à-dire ayant n lignes et p colonnes. On va définir des opérations élémentaires sur les lignes de M, qui se traduisent par des multiplications à gauche par des matrices de $GL_n(\mathbf{K})$. Il est sous-entendu qu'on peut définir de façon analogue des opérations élémentaires sur les colonnes de M, se traduisant par des multiplications à droite par des matrices de $GL_p(\mathbf{K})$.

• Toute opération élémentaire transforme M en une matrice équivalente à M et donc conserve le rang.

b) Matrices de dilatation

• Soit $\alpha \neq 0$. On note $\boxed{L_i \to \alpha L_i}$ l'opération qui consiste à multiplier par α la i-ème ligne de M. Cela revient à multiplier M à gauche par $\boxed{D_i(\alpha) = I + (\alpha - 1)E_{ii}}$, appelée matrice élémentaire de dilatation.

• L'application $\alpha \mapsto D_i(\alpha)$ est un morphisme du groupe multiplicatif $\mathbf{K}^*$ dans le groupe $GL_n(\mathbf{K})$.

c) Matrices de transvection

• Soient $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbf{K}$. On note $\boxed{L_i \to L_i + \alpha L_j}$ l'opération qui consiste à ajouter à la i-ème ligne de M le produit par α de sa j-ème ligne. Cela revient à multiplier M à gauche par $\boxed{T_{ij}(\alpha) = I + \alpha E_{ij}}$, appelée matrice élémentaire de transvection.

• L'application $\alpha \mapsto T_{ij}(\alpha)$ est un morphisme du groupe additif $\mathbf{K}$ dans le groupe $GL_n(\mathbf{K})$.

d) Matrices de transposition

• Soient $i \neq j$. On note $\boxed{L_i \leftrightarrow L_j}$ l'opération qui consiste à échanger la i-ème et la j-ème lignes de M. Cela revient à multiplier M à gauche par $\boxed{P_{(ij)} = I - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}}$, appelée matrice de transposition. Cette opération, bien que pratique, n'est pas indispensable d'un point de vue théorique car $L_i \leftrightarrow L_j$ équivaut à la suite d'opérations : $L_i \to L_i + L_j$; $L_j \to L_j - L_i$; $L_i \to L_i + L_j$; $L_j \to -L_j$.

• Plus généralement, étant donnée une permutation σ de {1, 2, … , n}, on note P_σ la matrice $\left(\delta_{\sigma(i),j}\right)$, appelée matrice de permutation. Multiplier M à gauche par P_σ revient à faire agir la permutation σ sur les lignes de M. L'application $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme du groupe symétrique S_n dans le groupe $GL_n(\mathbf{K})$.

2. Applications

a) Inversion d'une matrice carrée

Théorème : Soit M une matrice inversible de $M_n(\mathbf{K})$. Alors il existe des matrices élémentaires de transvection U_i telles que $M = U_1 U_2 \dots U_r D_n(\det M)$.

Conséquence 1 : Pour calculer pratiquement l'inverse de M, on effectue simultanément les mêmes opérations élémentaires sur les lignes de M et de I, jusqu'à ce que M soit transformée en I ; I est alors devenue M^{-1}.

Conséquence 2 : $GL_n(\mathbf{K})$ est engendré par les matrices élémentaires de dilatation et de transvection ; $SL_n(\mathbf{K})$ est engendré par les matrices élémentaires de transvection.

Conséquence 3 : Deux matrices A et B de $M_{n,p}(\mathbf{K})$ sont équivalentes ssi on peut passer de A à B par des opérations élémentaires sur les lignes *et* sur les colonnes.

b) Résolution d'un système linéaire

Théorème du pivot de Gauss : Soit M une matrice de rang r de $M_{n,p}(\mathbf{K})$. Par des opérations élémentaires sur les lignes, on peut transformer M en une matrice G échelonnée ayant r lignes non nulles.

Théorème du pivot de Hermite-Jordan : Soit M une matrice de rang r de $M_{n,p}(\mathbf{K})$. Par des opérations élémentaires sur les lignes, on peut transformer M en une matrice H échelonnée ayant r lignes non nulles, le premier élément non nul de chaque ligne non nulle étant 1 et tous les autres éléments de la colonne correspondante étant nuls.

A partir de l'un de ces théorèmes, on retrouve immédiatement tous les résultats théoriques concernant les systèmes linéaires et on dispose d'une méthode pratique de résolution.

c) Calcul du rang d'une matrice rectangulaire

Les opérations élémentaires conservant le rang, on peut effectuer des opérations élémentaires sur les lignes *et* les colonnes jusqu'à l'obtention d'une matrice échelonnée.

d) Calcul du déterminant d'une matrice carrée

On peut effectuer des opérations élémentaires sur les lignes *et* les colonnes jusqu'à l'obtention d'une matrice triangulaire, en tenant compte du fait que det $D_i(\alpha) = \alpha$, det $T_{ij}(\alpha) = 1$ et det $P_\sigma = \varepsilon(\sigma)$.

Bibliographie

CABANE et LEBOEUF, *Matrices et réduction,* Ellipses
OVAERT et VERLEY, *Algèbre vol. 1,* CEDIC/Fernand Nathan
TISSERON, *Géométries affine, projective et euclidienne,* Hermann