DÉTERMINANTS ; APPLICATIONS

Remarques générales

Ne pas se perdre dans les définitions et propriétés des déterminants, consacrer la moitié du temps aux applications. Celles-ci étant fort nombreuses, on en développera quelques unes selon ses possibilités et on se contentera d'évoquer oralement les autres.

Plan

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps **K** commutatif de caractéristique nulle (en général **R** ou **C**). On note L(E) l'ensemble des endomorphismes de E et $M_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices carrées à coefficients dans **K**. On suppose connue la définition d'une forme n-linéaire alternée (ou, ce qui est équivalent en caractéristique nulle, antisymétrique).

1. <u>Définition et propriétés des déterminants</u>

a) Déterminant d'une famille de n vecteurs

Etant donnée une base B de E, il existe une unique forme n-linéaire alternée φ définie sur E telle que φ(B) = 1. On l'appelle <u>déterminant dans la base B</u> et on la note $\det_B$. Pour toute famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de n vecteurs de E, on a

$$\boxed{\det_B(u_1,\ldots,u_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1)1}\cdots x_{\sigma(n)n}},$$

où $(x_{ji})_{1\le j\le n}$ désigne la famille des coordonnées de u_i dans la base B. On écrit : $\det_B(u_1, \ldots, u_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$.

Propriétés :

• Changement de base : si C est une autre base, on a $\boxed{\det_B = \det_B(C)\det_C}$.

• $\det_B(u_1, \ldots, u_n) = 0$ ssi la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est liée.

• Calcul pratique lorsque n = 2 ou n = 3 *(règle de Sarrus)*.

b) Déterminant d'un endomorphisme

Etant donné un endomorphisme f de E, le scalaire $\det_B(f(B))$ ne dépend pas de la base B choisie. On l'appelle <u>déterminant de f</u> et on le note det f. Pour toute famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de n vecteurs de E et toute base B, on a

$$\boxed{\det_B(f(u_1),\ldots,f(u_n)) = \det f \times \det_B(u_1,\ldots,u_n)}.$$

Propriétés :

• L'application det : (L(E), ∘) → (**K**, .) est un homomorphisme surjectif de monoïdes. $\boxed{\det f \neq 0 \text{ ssi } f \in GL(E)}$.

L'application det : (GL(E), ∘) → (**K***, .) est un homomorphisme surjectif de groupes. Son noyau est un sous-groupe distingué de GL(E) appelé <u>groupe spécial linéaire</u> de E et noté SL(E).

• Une base B étant fixée, det f est un polynôme en les coordonnées des vecteurs de la famille f(B). En particulier, det est continue, GL(E) est ouvert, SL(E) est fermé, etc.

c) Déterminant d'une matrice

Etant donnée une matrice M de $M_n(\mathbf{K})$, on appelle <u>déterminant de M</u> et on note det M le déterminant de l'endomorphisme $X \mapsto MX$ de $\mathbf{K}^n$. Si f est un endomorphisme de E de matrice M dans une base B, det f = det M.

Les déterminants des sous-matrices carrées de M sont les <u>mineurs</u> de M. Le mineur d'ordre n - 1 obtenu en enlevant la ligne i et la colonne j se note $D_{ij}(M)$. Le nombre $(-1)^{i+j} D_{ij}(M)$ est le <u>cofacteur d'indice (i, j)</u>. La matrice des cofacteurs est la <u>comatrice</u> de M et sa transposée la <u>matrice complémentaire</u> de M , notée $\tilde{M}$.

Propriétés :

• $\boxed{\det {}^tM = \det M}$. (On peut donc travailler sur les lignes au lieu de travailler sur les colonnes.)

• Développement par rapport à une ligne : posons $M = (a_{ij})$; pour tout i, on a : $\boxed{\det M = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} D_{ik}(M)}$.

• M est inversible ssi $\det M \neq 0$. Dans ce cas : $\boxed{M^{-1} = \dfrac{1}{\det M} \tilde{M}}$.

2. Applications

a) Déterminant de Gram, calcul de la distance de deux sous-espaces

Soit E un espace affine, de direction $\vec{E}$. Le déterminant de Gram d'une famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r)$ de vecteurs de $\vec{E}$ est le déterminant de la matrice $\left[(\vec{u}_i \mid \vec{u}_j)\right]_{1 \leq i, j \leq r}$; on le note $\mathrm{Gram}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r)$.

• $\boxed{\text{La famille } (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r) \text{ est libre ssi } \mathrm{Gram}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r) \neq 0}$.

• Soient F et G deux sous-espaces affines de E, A un point de F, B un point de G et $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r)$ une base de $\vec{F} + \vec{G}$. La distance de F à G est donnée par : $\boxed{d^2(F,\ G) = \dfrac{\mathrm{Gram}(\overrightarrow{AB},\ \vec{u}_1,\ \ldots, \vec{u}_r)}{\mathrm{Gram}(\vec{u}_1,\ \ldots, \vec{u}_r)}}$.

Cas particulier : distance d'un point M à un sous-espace affine F.

b) Condition de cocyclicité de quatre points (théorème de Ptolémée)

Soient M_1, M_2, M_3, M_4 quatre points distincts du plan. On note (x_i, y_i) les coordonnées de M_i et $d_{ij} = M_iM_j$. Les points M_1, M_2, M_3, M_4 sont cocycliques ou alignés ssi l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

$$\text{(i)} \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ; \qquad \text{(ii)} \begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ; \qquad \text{(iii)}\ d_{12}d_{34} \pm d_{13}d_{24} \pm d_{14}d_{23} = 0.$$

c) Points d'inflexion d'une courbe

Soit Γ la courbe d'équation f(x, y) = 0, où f est définie et de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$. Si un point régulier M de Γ est un point d'inflexion, alors ses coordonnées annulent le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & f'_x & f'_y \\ f'_x & f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f'_y & f''_{xy} & f''_{y^2} \end{vmatrix}$.

Application : une conique non dégénérée n'a pas de point d'inflexion.

d) Autres parties du programme où interviennent des déterminants (voir leçons correspondantes)

• Résolution des systèmes linéaires : déterminant principal, bordants, formules de Cramer.
• Réduction des endomorphismes : polynôme caractéristique.
• Formes quadratiques : discriminant (= déterminant de Gram d'une base), condition de positivité à l'aide des mineurs principaux, classification des coniques et quadriques.
• Problèmes d'incidence en géométrie affine, en coordonnées cartésiennes ou barycentriques.
• Orientation, produits mixte et vectoriel, calcul de distances, aires et volumes, propriétés métriques des courbes.
• Problèmes d'élimination : résultant (= déterminant de Sylvester), discriminant.
• Calcul différentiel : jacobien ; équations différentielles linéaires : wronskien.

Bibliographie

ARNAUDIÈS et FRAYSSE, *Cours de mathématiques*, Dunod
RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX, *Cours de mathématiques spéciales*, Masson