TRIGONALISATION DES ENDOMORPHISMES, SOUS-ESPACES CARACTÉRISTIQUES ; APPLICATIONS.

Remarques générales

Insister sur les applications. Prévoir des exemples intéressants : matrices réelles trigonalisables mais non diagonalisables ; matrices réelles non trigonalisables dans **R** et nécessitant un travail dans **C**.

Plan

Introduction

Soient **K** l'un des corps **R** ou **C**, E un **K**-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. On note χ_u le polynôme caractéristique de u et μ_u son polynôme minimal. On suppose connues les généralités concernant ces notions.

1. Endomorphismes trigonalisables

• On dit que u est <u>trigonalisable</u> s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

• Une matrice M de $M_n(\mathbf{K})$ s'identifie à l'endomorphisme u : $\mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$, $X \mapsto MX$. On dit que M est <u>trigonalisable</u> si u est diagonalisable.

• Inversement, si $u \in L(E)$ a pour matrice M dans une base de E, u est trigonalisable ssi M est semblable à une matrice triangulaire supérieure, ssi M est trigonalisable.

• $\boxed{\text{u est trigonalisable ssi } \chi_u \text{ est scindé}}$. C'est toujours vrai lorsque K = C.

> *Exercice :* Soient u et v deux endomorphismes trigonalisables qui commutent. Montrer qu'on peut les trigonaliser dans la même base.

2. Sous-espaces caractéristiques, décomposition spectrale

Dans toute cette partie, on suppose que χ_u est scindé. On note $\chi_u = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - X)^{m_i}$ et $\mu_u = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{r_i}$, où les λ_i désignent les valeurs propres deux à deux distinctes de u.

a) Lemme des noyaux

Soient P_1, ..., P_k des polynômes de $\mathbf{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux et $P = P_1P_2...P_k$. Alors $\boxed{\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} P_i(u)}$.

b) Sous-espaces caractéristiques

• $N(\lambda_i) = \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{id})^{r_i}$ est appelé <u>sous-espace caractéristique</u> associé à la valeur propre λ_i.

• $\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^{k} N(\lambda_i)}$, chaque $N(\lambda_i)$ est stable par u et $\boxed{\dim N(\lambda_i) = m_i}$. De plus, il existe une base de chaque $N(\lambda_i)$ telle que la matrice dans cette base de l'endomorphisme induit par u soit triangulaire supérieure. En définitive, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} T_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & T_k \end{pmatrix}$ avec $T_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$.

c) Décomposition spectrale

u s'écrit de manière unique sous la forme u = d + n, avec d diagonalisable, n nilpotent et dn = nd.

Exercice : Soient $M \in GL_n(\mathbf{C})$ et $p \geq 2$. Montrer que si M est diagonalisable, alors toute matrice N telle que $N^p = M$ est encore diagonalisable.

2. Applications de la trigonalisation (à développer sur des exemples)

Dans les applications suivantes, on suppose que A = D + N, avec D diagonalisable et N nilpotente d'indice r.

a) Calcul des puissances et de l'exponentielle d'une matrice

$\boxed{A^k = (D+N)^k = \sum_{i=0}^{r-1} C_k^i N^i D^{k-i}}$ et $\boxed{e^A = e^D e^N = e^D \sum_{i=1}^{r-1} \frac{N^i}{i!}}$.

Si $D = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$, alors $D^i = P\begin{pmatrix} \lambda_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^i \end{pmatrix}P^{-1}$ et $e^D = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}P^{-1}$.

b) Etude de systèmes de suites à récurrence linéaire d'ordre 1 et de suites à récurrence linéaire d'ordre n

Si (U_p) est définie par U_0 et $U_{p+1} = AU_p$, alors $\boxed{U_p = A^p U_0}$.
Si (u_p) est définie par $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ et $u_{p+n} = a_0 u_p + a_1 u_{p+1} + \ldots + a_{n-1} u_{p+n-1}$ on se ramène au cas précédent en posant $U_p = \begin{pmatrix} u_p \\ u_{p+1} \\ \vdots \\ u_{p+n-1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

c) Résolution de systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 et d'équations différentielles linéaires d'ordre n

Le système différentiel X' = AX a pour solution générale $\boxed{X = e^{tA}.C}$, avec $C \in \mathbf{K}^n$.
L'équation différentielle $x^{(n)} = a_0 x + a_1 x' + \cdots + a_{n-1} x^{(n-1)}$ se ramène au cas précédent en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Bibliographie

CABANE et LEBOEUF, *Algèbre linéaire II, Matrices et réduction*, Ellipses
RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX, *Cours de mathématiques spéciales, tomes 1 et 2*, Masson
ARNAUDIÈS et FRAYSSE, *Cours de mathématiques, tome 1 : Algèbre*, Dunod