Leçon 124. Endomorphismes diagonalisables - Exemples et applications

Par M.Schavsinski

Soit E un $\mathbb{K}$-ev ($\mathbb{K}$= $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
Soit f $\in \mathcal{L}(E)$

I)Définitions

Définition 1.
Valeur propre et vecteur propre

Théorème 1.
Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k (k \in \mathbb{N}^*)$ des valeurs propres distinctes 2 à 2 de f.
Alors $\sum_{i=1}^{k} E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$

Définition 2.
f est diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres de f.

II)En dimension finie

Soit $\mathcal{B}$ une base de E
dim E = n $\in \mathbb{N}^*$
A = $Mat_{\mathcal{B}}$ f

Définition 3.
$A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale.

remarque
Un endomorphisme est diagonalisable si sa matrice dans une base quelconque est diagonalisable.

Définition 4.
Polynôme caractéristique associé à f (noté χ_f)

Propriété 1.
Si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et à racines simples alors f est diagonalisable.

exemples :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$

Propriété 2.
Soit λ une racine de χ_f de multiplicité r alors dim $E_\lambda \leqslant r$.

Théorème 2.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) f est diagonalisable
(ii)χ_f est scindé et pour toute racine λ de χ_f de multiplicité r_λ, on a dim $E_\lambda = r_\lambda$
(iii) Il existe des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ de f telles que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$

exemples :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$

III)Propriétés importantes

Théorème 3.
f est diagonalisable ssi il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples

exemples :
une matrice circulante de type (n, n) est diagonalisable dans $\mathbb{C}$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Propriété 3.
Si f est diagonalisable et si f(F)$\subset$ F alors $u \mid_F$ est diagonalisable.

Propriété 4.
Soit f et g $\in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$ alors :
(i) Tout sous-espace propre de f est stable par g est diagonalisable
(ii) Im(f) est stable par g

Théorème 4.
Si f et g sont deux endomorphismes diagonalisables commutants alors il existe une base de diagonalisation commune.

Théorème 5.
Tout endomorphisme symétrique réel est diagonalisable en base orthonormée.

IV)Applications

1) Donner l'équation réduite de la quadrique d'équation $7x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 20xz + 16yz - 36x + 72y - 108z + 36 = 0$

2) Résolution du système différentiel linéaire :

$$\begin{cases} x' = & x + z \\ y' = & -y - z \\ z' = & 2y + z \end{cases}$$