ENDOMORPHISMES DIAGONALISABLES

Remarques générales

• "Pour certaines leçons, il peut être intéressant de détailler la solution d'un exercice, mais ceux de pure routine sont à proscrire (diagonalisation d'une matrice 3×3, ...)." (Rapport du jury 1989)

• "Le calcul des puissances d'une matrice se fait souvent plus efficacement à l'aide d'un polynôme annulateur qu'à l'aide d'une diagonalisation." (Rapport du jury 1990)

Plan

Introduction

Soient **K** l'un des corps **R** ou **C**, E un **K**-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. On note χ_u le polynôme caractéristique de u, μ_u son polynôme minimal, $m(\lambda)$ l'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ de u et $E(\lambda)$ le sous-espace propre associé à λ On suppose connues les généralités concernant ces notions.

1. Endomorphismes diagonalisables

a) Définition et caractérisations

• On dit que u est <u>diagonalisable</u> s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

> *Exemples :* Une homothétie et une dilatation sont diagonalisables, une transvection ne l'est pas.

• Les propriétés suivantes sont équivalentes :

> (i) u est diagonalisable.
> (ii) E est somme directe des sous-espaces propres de u.
> (iii) χ_u est scindé et pour toute racine λ de χ_u, $\dim E(\lambda) = m(\lambda)$.
> (iv) u annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples.
> (v) μ_u est scindé et n'a que des racines simples.

La seule implication délicate à démontrer est (v) $\Rightarrow$ (i), qui repose sur le lemme des noyaux.

> *Exercice :* Si u et v sont diagonalisables et commutent, alors il existe une base dans laquelle u et v diagonalisent simultanément.

b) Point de vue matriciel

• Une matrice M de $M_n(\mathbf{K})$ s'identifie à l'endomorphisme u : $\mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$, $X \mapsto MX$. On dit que M est <u>diagonalisable</u> si u est diagonalisable.

• Inversement, si $u \in L(E)$ a pour matrice M dans une base de E, on a les nouvelles caractérisations suivantes de la diagonalisabilité de u :

> (vi) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.
> (vii) M est semblable à une matrice diagonale.
> (viii) M est diagonalisable.

> *Exercice :* L'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbf{C})$. C'est faux dans $M_n(\mathbf{R})$.

c) Cas des endomorphismes symétriques ou hermitiens

• On suppose que **K** = **R**, que E est un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique. Alors u est diagonalisable et il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.

• On suppose que **K** = **C**, que E est un espace hermitien et u un endomorphisme hermitien. Alors toutes les valeurs propres de u sont réelles, u est diagonalisable et il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.

> *Exercice :* Soit S une matrice symétrique positive. Démontrer qu'il existe une unique matrice symétrique positive R telle que $R^2 = S$.

2. Applications de la diagonalisation (à développer sur des exemples)

• Calcul des puissances et de l'exponentielle d'une matrice

• Etude de systèmes de suites à récurrence linéaire d'ordre 1 et de suites à récurrence linéaire d'ordre n

• Résolution de systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 et d'équations différentielles linéaires d'ordre n

• Décomposition de formes quadratiques en somme de carrés et étude de coniques ou de quadriques

Bibliographie

CABANE et LEBOEUF, *Algèbre linéaire II, Matrices et réduction,* Ellipses
RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX, *Cours de mathématiques spéciales, tomes 1 et 2,* Masson
ARNAUDIÈS et FRAYSSE, *Cours de mathématiques, tome 1 : Algèbre*, Dunod
MONIER, *Algèbre, tome 2,* Dunod