ENDOMORPHISMES HERMITIENS EN DIMENSION FINIE

Remarques générales

• Programme : Endomorphismes hermitiens, matrices hermitiennes. Diagonalisation d'un endomorphisme hermitien dans une base orthonormale. Diagonalisation d'une matrice hermitienne au moyen d'une matrice unitaire.

• Cette leçon isolée n'a que peu de rapport avec le reste du programme, aussi il est difficile de présenter des applications intéressantes.

Plan

Introduction

Soit E un espace hermitien de dimension n. Le produit scalaire hermitien et la norme hermitienne sont notés respectivement $(x|y)$ et $\|x\|$.
On suppose connue la notion d'adjoint d'un endomorphisme u de E ; en dimension finie, cet adjoint existe et est unique : on le note u^* et on a $u^* = f^{-1} \circ {}^t u \circ f$, où f est la bijection semi-linéaire $x \mapsto (.\,|x)$ de E sur E^*.
On suppose également connus les résultats simples sur les automorphismes unitaires et le groupe unitaire.

1. Endomorphismes hermitiens

a) Définitions

On dit qu'un endomorphisme u de E est <u>hermitien</u> si $u^* = u$.
On dit qu'une matrice A de $M_n(\mathbf{C})$ est <u>hermitienne</u> si ${}^t\overline{A} = A$.

Liens entre ces deux définitions :
• Si u est un endomorphisme hermitien, alors dans toute base orthonormale de E la matrice de u est hermitienne.
• Si A est une matrice hermitienne, alors l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à A est hermitien.

On note H l'ensemble des endomorphismes hermitiens ; c'est un **R**-espace vectoriel de dimension n^2.
Tout endomorphisme u s'écrit de manière unique sous la forme $u = h_1 + i\, h_2$, avec h_1 et h_2 dans H.

b) Propriétés

• *<u>Théorème fondamental</u> :*

u est hermitien ssi toutes les valeurs propres de u sont réelles et s'il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.

• *Caractérisations des valeurs propres de u :* Si (e_i) est une base orthonormale de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ de u, alors pour tout i :

$$\lambda_i = (u(e_i)|e_i) = \sup\left\{\frac{(u(x)|x)}{\|x\|^2},\ x \neq 0 \text{ et } x \in \langle e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}\rangle^{\perp}\right\} = \inf\left\{\frac{(u(x)|x)}{\|x\|^2},\ x \neq 0 \text{ et } x \in \langle e_1, e_2, \ldots, e_i\rangle\right\}.$$

• *Traduction matricielle :* A est une matrice hermitienne ssi il existe une matrice unitaire U (${}^t\overline{U} = U^{-1}$) et une matrice diagonale réelle D telles que $A = UDU^{-1}$.

> *Exercice :* Soient u et v deux endomorphismes hermitiens qui commutent. Montrer qu'on peut les diagonaliser dans une même base orthonormale.

2. Endomorphismes hermitiens positifs

a) Endomorphismes hermitiens positifs et définis positifs

On dit qu'un endomorphisme hermitien est <u>positif</u> (resp. <u>défini positif</u>) si toutes ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives). On note H^+ (resp. H^{++}) l'ensemble des endomorphismes hermitiens positifs (resp. définis positifs).

L'exponentielle induit un homéomorphisme de H sur H^{++}.

Exercice 1 : Si $u \in H^+$, il existe un unique $v \in H^+$ tel que $v^2 = u$.

Exercice 2 : Soient A et B deux matrices hermitiennes positives. Montrer que $0 \leq \operatorname{tr}(AB) \leq \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

b) Décomposition polaire d'un endomorphisme

Soit u un endomorphisme de E. Alors :
(i) il existe un endomorphisme hermitien positif v et un endomorphisme unitaire w tels que u = v o w ;
(ii) si de plus u est inversible, le couple (v, w) est unique et les applications $u \mapsto v$ et $u \mapsto w$ sont continues.

c) Décomposition de Choleski d'une matrice hermitienne positive

Soit M une matrice hermitienne positive. Il existe une matrice triangulaire supérieure T telle que $M = T^*T$.

Application 1 : Résolution du système linéaire MX = Y.

Application 2 : Inégalité de Hadamard. Si $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{C})$, on a $|\det(A)| \leq \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)\right)^{1/2}$.

3. Application aux formes quadratiques hermitiennes

a) Lien entre endomorphismes hermitiens et formes quadratiques hermitiennes

Notons Q le **R**-espace vectoriel des formes quadratiques hermitiennes. L'application $u \mapsto [x \mapsto (x|u(x))]$ est un isomorphisme de H sur Q. L'endomorphisme hermitien u est positif (resp. défini positif) ssi la forme quadratique hermitienne associée est positive (resp. définie positive).

b) Orthogonalisation d'une forme quadratique hermitienne dans un espace hermitien

Soient E un espace hermitien et q une forme quadratique hermitienne sur E. Il existe une base orthonormale de E orthogonale pour q.

Application : Signature et décomposition en carrés d'une forme quadratique hermitienne (même si E n'est pas hermitien au départ et q donnée dans une base arbitraire).

c) Orthogonalisation simultanée de deux formes quadratiques hermitiennes

Soient E un **C**-espace vectoriel de dimension finie, q et q' deux formes quadratiques hermitiennes sur E, avec q définie positive. Il existe une base de E orthonormale pour q et orthogonale pour q'.

Bibliographie

TAUVEL, *Mathématiques générales pour l'agrégation*, Masson
RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX, *Cours de mathématiques spéciales, tome 2,* Masson
MONIER, *Algèbre, tome 2,* Dunod