APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DES NOMBRES COMPLEXES : ÉTUDE DE CONFIGURATIONS, DE TRANSFORMATIONS …

Remarques générales

• Nous donnons seulement un inventaire des questions qui peuvent être abordées. La leçon gagnera à être illustrée par quelques exercices substantiels.

• Il ne faut pas se contenter du programme de Terminale ! Étudier à l'aide des nombres complexes les inversions et les transformations circulaires permet d'élargir le plan de façon intéressante.

Plan

1. <u>Principes de l'utilisation des nombres complexes en géométrie</u>

• Soit P un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{I}, \vec{J})$. L'application $P \to \mathbf{C}$, $M = O + x\vec{I} + y\vec{J} \mapsto z = x + i\,y$, est un isomorphisme d'espaces affines euclidiens orientés. On dit que z est l'<u>affixe</u> du point M et on note M(z). L'application associée $\vec{P} \to \mathbf{C}$, $\vec{u} = x\vec{I} + y\vec{J} \mapsto z = x + i\,y$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels euclidiens orientés. On dit que z est l'<u>affixe</u> du vecteur $\vec{u}$ et on note $\vec{u}(z)$.

• Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}_1(z_1)$ et $\vec{u}_2(z_2)$, leur produit scalaire s'exprime par $\vec{u}_1.\vec{u}_2 = \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$ et leur angle $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ a pour mesure $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$. (C'est justement l'existence de la fonction argument, isomorphisme de $(\mathbf{U}, \times)$ sur $(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}, +)$ qui permet de mesurer les angles !)

• Soit f : M $\mapsto$ M' une application de P dans P. f s'identifie à l'application z $\mapsto$ z' de **C** dans **C**, avec M(z) et M'(z'), appelée <u>expression complexe</u> de f.

2. <u>Étude de configurations</u>

a) Droites et cercles

• *Droites*
Toute droite a une équation complexe de la forme $\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$, avec $a \in \mathbf{C}^*$ et $b \in \mathbf{R}$. Réciproquement, toute équation de cette forme représente une droite, de vecteur normal a et passant par $-\frac{b}{2\bar{a}}$.

• *Condition d'alignement*
Trois points distincts A, B, C sont alignés ssi le rapport $\frac{c-a}{b-a}$ est réel.

• *Cercles*
Tout cercle a une équation complexe de la forme $z\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$, avec $a \in \mathbf{C}$ et $b \in \mathbf{R}$. Réciproquement, toute équation de cette forme représente un cercle, de centre - a et de rayon $\sqrt{|a|^2 - b}$, ou l'ensemble vide.

• *Conditions de cocyclicité*

Quatre points distincts A, B, C, D sont cocycliques ou alignés ssi le birapport $\frac{d-a}{c-a}\Big/\frac{d-b}{c-b}$ de leurs affixes est réel, ssi AB.CD $\pm$ AC.BD $\pm$ AD.BC = 0.

b) Polygones réguliers

Un polygone $A_1A_2\ldots A_n$ (il est pratique d'indicer avec **Z**/n**Z**, de sorte que n + 1 = 1) est dit <u>régulier</u> lorsque tous ses côtés A_iA_{i+1} sont égaux et tous ses angles $\left(\overrightarrow{A_iA_{i-1}}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}}\right)$ sont égaux. Pour étudier un tel polygone, on travaille dans le plan complexe en prenant pour origine l'isobarycentre O des A_i et en posant $a_1 = 1$.

• $A_1A_2\ldots A_n$ est un polygone régulier ssi, pour tout i, $a_i = \xi^{i-1}$, où ξ est une racine primitive n-ème de l'unité.
• Il y a $\frac{\varphi(n)}{2}$ polygones réguliers à n côtés (φ étant l'indicatrice d'Euler) dont un seul est convexe (les autres sont dits <u>étoilés</u>).

3. <u>Étude de transformations</u>

a) Similitudes

• La translation de vecteur $\vec{u}(b)$ a pour expression complexe z' = z + b. La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ a pour expression complexe $z' = e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})\omega$. Réciproquement, toute expression complexe z' = az + b, avec |a| = 1, représente une translation si a = 1, une rotation si a ≠ 1.

• La réflexion d'axe D, d'équation $\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + \beta = 0$ a pour expression complexe $z' = -\frac{\alpha\,\overline{z} + \beta}{\overline{\alpha}}$.
Réciproquement, toute expression complexe z' = a $\overline{z}$ + b, avec |a| = 1, représente une réflexion si $a\overline{b} + b = 0$, une réflexion-translation si $a\overline{b} + b \neq 0$.

f est une similitude directe (resp. indirecte) ssi il existe des nombres complexes a ≠ 0 et b tels que, pour tout nombre complexe z, f(z) = az + b (resp. $a\overline{z} + b$).

b) Inversions

On travaille désormais dans le plan conforme **C** ∪ {∞} et on appelle "cercle" soit un cercle de **C**, soit la réunion d'une droite de **C** et du point à l'infini. L'<u>inversion de pôle P et de puissance k</u> (k ≠ 0) est l'application i définie par i(P) = ∞, i(∞) = P et sinon i(M) = M' où M' est le point de (PM) tel que $\overline{PM}.\overline{PM'} = k$. Son expression complexe est $z' = p + \frac{k}{\overline{z} - \overline{p}}$ (plus simplement $z' = \frac{k}{\overline{z}}$ si on prend le pôle pour origine).

Une inversion est une bijection involutive qui transforme tout cercle en un cercle.

c) Transformations circulaires

Les bijections du plan conforme dans lui-même qui transforment tout cercle en un cercle sont exactement les homographies $z \to \frac{az + b}{cz + d}$ et les antihomographies $z \to \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d}$ (ad - bc ≠ 0).

Bibliographie

TISSERON, *Géométries affine, projective et euclidienne*, Hermann
BERGER, *Géométrie tome 2,* CEDIC/Fernand Nathan
AVEZ, *La leçon de géométrie à l'oral de l'agrégation*, Masson
ARNAUDIÈS et FRAYSSE, *Cours de mathématiques, tome 1,* Dunod