SIMILITUDES PLANES
DIRECTES ET INDIRECTES : FORMES RÉDUITES

Remarques générales

• Ne pas se contenter du programme de Terminale, même augmenté des similitudes indirectes. Des exposés complets se trouvent dans FRENKEL, TISSERON et surtout dans BERGER.

• On suppose naturellement connue la description des isométries planes.

Plan

E est un plan affine euclidien.

1. <u>Notion de similitude et propriétés générales</u>

a) Définition et premières caractérisations

• Une application f non constante de E dans E est appelée <u>similitude</u> si elle conserve les rapports de distances, c'est-à-dire si $\frac{f(A)f(B)}{f(C)f(D)} = \frac{AB}{CD}$ chaque fois que les dénominateurs ne s'annulent pas.

• Pour qu'une application f de E dans E soit une similitude, il faut et il suffit qu'il existe un réel $k > 0$ tel que, pour tous points M et N, $f(M)f(N) = k\,MN$. k est appelé <u>rapport de similitude</u>.

• Pour qu'une application f de E dans E soit une similitude de rapport k, il faut et il suffit qu'elle soit le produit d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie.

b) Conséquences

• L'ensemble des similitudes, noté Sim(E), est un sous-groupe du groupe affine qui contient le groupe des isométries et le groupe des homothéties-translations. Les similitudes de déterminant positif sont dites <u>directes</u>, leur ensemble, noté $Sim^+(E)$, est un sous-groupe de Sim(E). Les similitudes de déterminant négatif sont dites <u>indirectes</u>.

• Les similitudes transforment les droites en droites, les cercles en cercles, conservent les rapports de mesures algébriques, les rapports de distances, les barycentres, les angles non orientés, l'orthogonalité, le contact. Les similitudes directes conservent les angles orientés, les similitudes indirectes les changent en leurs opposés.

2. <u>Description des similitudes planes</u>

a) Formes réduites

Théorème : Une similitude de rapport différent de 1 admet un unique point fixe O et elle est de façon unique produit d'une homothétie de centre O et de rapport positif et d'une isométrie admettant O pour point fixe. De plus, cette décomposition est commutative.

Première preuve (topologique) : appliquer le théorème du point fixe à f si $k < 1$, à f^{-1} si $k > 1$.
Deuxième preuve (algébrique) : utiliser le fait que, 1 n'étant pas valeur propre de $\vec{f}$, $Id - \vec{f}$ est injective donc bijective puisqu'on est en dimension finie.

Conséquences :
Une similitude de rapport 1 est une isométrie et sa forme réduite est supposée connue. Soit donc f une similitude de rapport $k \neq 1$ et soit O son unique point fixe, appelé <u>centre de similitude</u>.
• Si f est directe, $f = h \circ r = r \circ h$, où h est l'homothétie de centre O et de rapport k et r une rotation de centre O. L'angle de r est appelé <u>angle de similitude</u>.
• Si f est indirecte, $f = h \circ s = s \circ h$, où h est l'homothétie de centre O et de rapport k et s une réflexion d'axe passant par O. L'axe de s est appelé <u>axe de similitude</u>.

b) Expression complexe

En fixant un repère orthonormé (et donc une orientation) de E, on identifie E à **C** et f à une application de **C** dans **C**.

Théorème : f est une similitude directe (resp. indirecte) ssi il existe des nombres complexes $a \neq 0$ et b tels que, pour tout nombre complexe z, $f(z) = az + b$ (resp. $a\bar{z} + b$).

3. Caractérisations géométriques des similitudes

Théorème : Soit f une bijection de E dans E. Les propriétés suivantes sont équivalentes : (i) f est une similitude (ie conserve les rapports de distances) (ii) f conserve les angles géométriques (iii) f conserve l'orthogonalité (iv) f transforme tout cercle en un cercle.

On prouve les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i). La dernière utilise le théorème fondamental de la géométrie affine, supposé connu (les transformations affines de E sont les bijections de E dans E qui conservent l'alignement).

4. Compléments sous forme d'exercices

a) Simple transitivité

• Soient quatre points A, B, A', B' avec $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Montrer qu'il existe une unique similitude directe (resp. indirecte) f telle que f(A) = A' et f(B) = B'. Construire son centre (resp. son centre et son axe) lorsque ce n'est pas une isométrie.
• Soient A, B, A', B' quatre points distincts. Montrer que la similitude directe telle que $A \mapsto A'$ et $B \mapsto B'$ a même centre que la similitude directe telle que $A \mapsto B$ et $A' \mapsto B'$. En déduire que les cercles circonscrits aux quatre triangles d'un quadrilatère complet sont concourants.

b) Triangles semblables

Soient deux triangles ABC et A'B'C'. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes (avec les notations usuelles) :

(i) Il existe une similitude f telle que f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'

(ii) $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$

(iii) $\hat{A} = \hat{A}'$, $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$

(iv) $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$.

c) Différentielle de l'inversion

Montrer que, en tout point, la différentielle d'une inversion est une similitude. En déduire qu'une inversion conserve les angles géométriques.

Bibliographie

TISSERON, *Géométries affine, projective et euclidienne*, Hermann
BERGER, *Géométrie tome 2*, CEDIC/Fernand Nathan
FRENKEL, *Géométrie pour l'élève-professeur*, Hermann
TAUVEL, *Mathématiques générales pour l'agrégation*, Masson
AVEZ, *La leçon de géométrie à l'oral de l'agrégation*, Masson