ISOMÉTRIES DU PLAN ; FORMES RÉDUITES ; APPLICATIONS

Remarques générales

• Pour gagner du temps, on suppose connue la classification des automorphismes orthogonaux.

• Le programme mentionne “Exemples de groupes d’isométries laissant stable une partie du plan”. Pour illustrer ce thème de façon ni trop banale, ni trop compliquée, un bon choix semble être l’étude des groupes de frises.

Plan

E est un plan affine euclidien. On suppose connue la classification des automorphismes orthogonaux de $\vec{E}$.

1. Généralités sur les isométries

a) Définition et premières propriétés

• Une application f de E dans E est appelée <u>isométrie</u> si elle conserve la distance. Exemples : translation, réflexion.

• f est une isométrie ssi f est affine et $\vec{f} \in O(\vec{E})$. En particulier, une isométrie est bijective. Si $\vec{f} \in O^+(\vec{E})$, on dit que f est un <u>déplacement</u>, sinon un <u>antidéplacement</u>.

• L’ensemble des isométries est un groupe, noté Is(E). On note $Is^+(E)$ le sous-groupe des déplacements et $Is^-(E)$ le sous-ensemble des antidéplacements.

b) Décomposition canonique d’une isométrie

Une isométrie f s’écrit de manière unique f = t o g, où g est une isométrie ayant un ensemble non vide G de points fixes et où t est une translation de vecteur appartenant à $\vec{G}$. On a de plus f = g o t et $\vec{G} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id})$. Enfin si f n’a pas de point fixe, on a dim G ≥ 1.

2. Description des isométries planes

a) Formes réduites

L’étude des isométries ayant au moins un point fixe se ramène à celle des transformations orthogonales. Par ailleurs, d’après le théorème précédent, une isométrie sans point fixe est soit une translation, soit la composée commutative d’une réflexion et d’une translation de vecteur parallèle à l’axe de la réflexion. D’où le tableau :

	avec point(s) fixe(s)	sans point fixe
déplacement	ROTATION	TRANSLATION
antidéplacement	REFLEXION	REFLEXION-TRANSLATION

Conséquence : Toute isométrie plane est produit d’au plus trois réflexions. Les réflexions engendrent Is(E).

b) Expression complexe

Déplacements

La translation de vecteur $\vec{u}(b)$ a pour expression complexe z’ = z + b.

La rotation de centre Ω (ω) et d’angle θ a pour expression complexe z’ = $e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})\omega$.

Réciproquement, toute expression complexe z’ = az + b, avec |a| = 1, représente une translation si a = 1, une rotation si a ≠ 1.

Antidéplacements

La réflexion d’axe D d’équation $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0$ a pour expression complexe z’ = $\dfrac{-\alpha\bar{z} - \beta}{\bar{\alpha}}$.

Réciproquement, toute expression complexe $z' = a\bar{z} + b$, avec $|a| = 1$, représente une réflexion si $a\bar{b} + b = 0$, une réflexion-translation si $a\bar{b} + b \neq 0$.

3. Applications

a) Problèmes de construction

Quelques exemples : Construire un triangle équilatéral s'appuyant sur trois droites parallèles données. Construire un triangle connaissant ses médiatrices. Construire un polygone connaissant les milieux des côtés.

b) Problèmes d'optimisation

Problème de Fagnano : Inscrire dans un triangle ayant trois angles aigus un triangle de périmètre minimal.

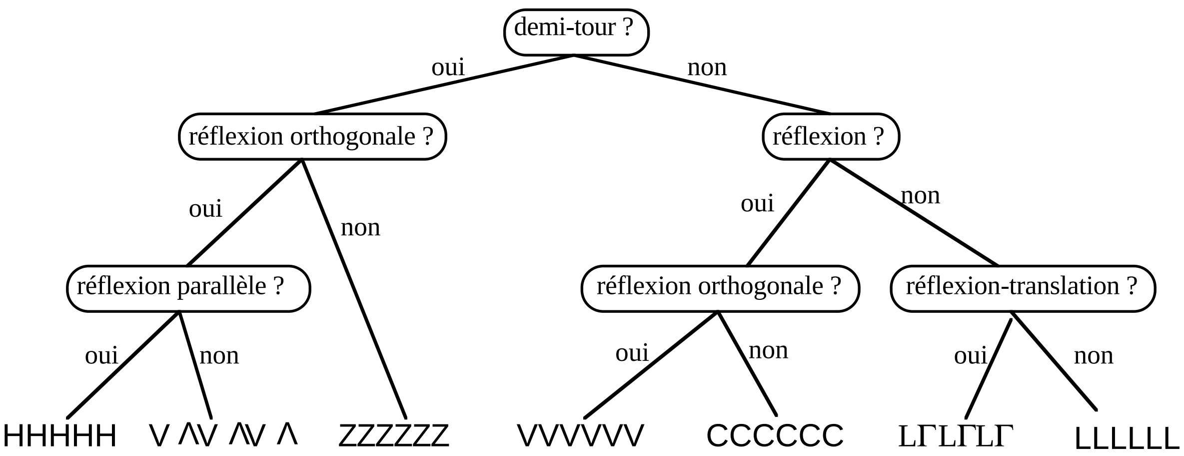
Problème de Steiner-Fermat-Toricelli : Soit ABC un triangle dont les trois angles sont $\leq 2\pi/3$. Trouver un point M tel que MA + MB + MC soit minimum.

c) Groupes de frises

Etant donné une partie F de E, l'ensemble G des isométries qui laissent F invariante est un sous-groupe de Is(E) appelé <u>groupe de F</u>. L'ensemble T des translations qui laissent F invariante est un sous-groupe de G, appelé <u>groupe des translations de F</u>. On dit que F est une <u>frise</u> si T est engendré par une translation non triviale. Dans la suite, on suppose que F est une frise et on désigne par t un générateur de T et par $\vec{v}$ son vecteur.

1) Une isométrie f de G\T est nécessairement de l'un des quatre types suivants : demi-tour, réflexion d'axe parallèle à $\vec{v}$, réflexion d'axe orthogonal à $\vec{v}$, réflexion-translation d'axe parallèle à $\vec{v}$.
2) Si G contient un demi-tour d, l'ensemble des demi-tours est $d \circ T$.
3) Si G contient une réflexion d'axe parallèle à $\vec{v}$, celle-ci est unique.
4) Si G contient une réflexion s d'axe orthogonal à $\vec{v}$, l'ensemble des réflexions de ce type est $s \circ T$.
5) Si G contient une réflexion-translation g d'axe parallèle à $\vec{v}$, l'ensemble des réflexions-translations est $g \circ T$.

On en déduit l'algorithme suivant de classification des frises. Au bout de chaque branche, on trouvera un dessin "prouvant" que ce cas se réalise effectivement. Voir TAUVEL pour la structure des groupes correspondants.



Bibliographie

AVEZ, *La leçon de géométrie à l'oral de l'agrégation*, Masson
TISSERON, *Géométries affine, projective et euclidienne*, Hermann
BERGER, *Géométrie tome 2*, CEDIC/Fernand Nathan
TAUVEL, *Mathématiques générales pour l'agrégation*, Masson