ISOMÉTRIES DE L'ESPACE AFFINE EUCLIDIEN DE DIMENSION 3 : FORMES RÉDUITES

Remarques générales

• Pour cette leçon assez délicate, nous ne donnons que l'essentiel. On trouvera des compléments et des exercices dans la bibliographie.

• Pour chaque type d'isométrie, prévoir un exemple montrant comment déterminer pratiquement ses éléments remarquables et … faire une figure !

Plan

E est un espace affine euclidien de dimension 3, de direction $\vec{E}$.

1. Etude résumée des isométries vectorielles

• Une application φ de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$ est appelée <u>isométrie (vectorielle)</u> si elle vérifie une des propriétés équivalentes suivantes : (i) φ conserve le produit scalaire ; (ii) φ est linéaire et conserve la norme. φ est alors bijective et a pour déterminant 1 ou -1. Exemples : <u>réflexion</u> (symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel), <u>demi-tour</u> (symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle).

• L'ensemble des isométries, noté $O(\vec{E})$, est un sous-groupe de $GL(\vec{E})$ appelé <u>groupe orthogonal</u> de $\vec{E}$. On note $O^+(\vec{E})$ (resp. $O^-(\vec{E})$) le sous-groupe (resp. le sous-ensemble) des isométries de déterminant 1 (resp. -1).

• Si φ est une isométrie, il existe une droite $\vec{D}$ et un plan $\vec{P}$ orthogonaux, stables par φ, tels que la restriction de φ à $\vec{D}$ soit Id ou -Id et la restriction de φ à $\vec{P}$ soit une rotation vectorielle. $\vec{D}$ et $\vec{P}$ sont uniques lorsque φ est distinct de Id et -Id. Si $\varphi|_{\vec{D}} = \mathrm{Id}$, on dit que φ est une <u>rotation (vectorielle)</u> d'<u>axe</u> $\vec{D}$ et d'<u>angle</u> l'angle de $\varphi|_{\vec{P}}$. Si $\varphi|_{\vec{D}} = -\mathrm{Id}$, φ est le produit commutatif de la rotation d'axe $\vec{D}$ et d'angle l'angle de $\varphi|_{\vec{P}}$ et de la réflexion par rapport à $\vec{P}$; on dit alors que c'est une <u>réflexion-rotation</u>. L'espace étant orienté, si on désire mesurer l'angle de $\varphi|_{\vec{P}}$, on oriente conjointement $\vec{D}$ et $\vec{P}$ par le choix d'un vecteur unitaire de $\vec{D}$.

• $O(\vec{E})$ (resp. $O^+(\vec{E})$) est engendré par les réflexions (resp. les demi-tours).

2. Généralités sur les isométries affines

a) Définition et premières propriétés

• Une application f de E dans E est appelée <u>isométrie (affine)</u> si elle conserve la distance. Exemples : translation, <u>réflexion</u> (symétrie orthogonale par rapport à un plan affine), <u>demi-tour</u> (symétrie orthogonale par rapport à une droite affine).

• f est une isométrie ssi f est affine et $\vec{f} \in O(\vec{E})$. En particulier, une isométrie est bijective. Si $\vec{f} \in O^+(\vec{E})$, on dit que f est un <u>déplacement</u>, sinon un <u>antidéplacement</u>.

• L'ensemble des isométries est un groupe, noté Is(E). On note $Is^+(E)$ le sous-groupe des déplacements et $Is^-(E)$ le sous-ensemble des antidéplacements.

b) Décomposition canonique d'une isométrie

Une isométrie f s'écrit de manière unique f = t o g, où g est une isométrie ayant un ensemble non vide G de points fixes et où t est une translation de vecteur appartenant à $\vec{G}$. On a de plus f = g o t et $\vec{G} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id})$. Enfin si f n'a pas de point fixe, on a dim G ≥ 1.

3. Description des isométries affines

a) Formes réduites

L'étude des isométries ayant au moins un point fixe se ramène à celle des isométries vectorielles. Par ailleurs, d'après le théorème précédent, une isométrie sans point fixe est soit une translation, soit la composée commutative d'une isométrie ayant au moins une droite de points fixes et d'une translation de vecteur parallèle au sous-espace des points fixes de l'isométrie précédente. D'où le tableau :

	avec point(s) fixe(s)	*sans point fixe*
déplacement	**ROTATION** Cas particulier : **IDENTITÉ**	**ROTATION-TRANSLATION** ou **VISSAGE** Produit commutatif d'une rotation et d'une translation de vecteur non nul parallèle à l'axe de rotation Cas particulier : **TRANSLATION**
antidéplacement	**RÉFLEXION-ROTATION** Produit commutatif d'une réflexion et d'une rotation d'axe perpendiculaire au plan de réflexion Cas particulier : **RÉFLEXION**	**RÉFLEXION-TRANSLATION** Produit commutatif d'une réflexion et d'une translation de vecteur non nul parallèle au plan de réflexion

b) Générateurs

Is(E) est engendré par les réflexions : toute isométrie est produit d'au plus 4 réflexions.
$Is^+(E)$ est engendré par les retournements : tout déplacement est produit d'au plus 2 demi-tours.

Bibliographie

TISSERON, *Géométries affine, projective et euclidienne*, Hermann
BERGER, *Géométrie tome 2*, CEDIC/Fernand Nathan
TAUVEL, *Mathématiques générales pour l'agrégation*, Masson
AVEZ, *La leçon de géométrie à l'oral de l'agrégation*, Masson