ORIENTATION D'UN ESPACE VECTORIEL EUCLIDIEN DE DIMENSION 3.
PRODUIT MIXTE, PRODUIT VECTORIEL. APPLICATIONS.

SOMMAIRE

Contexte :

E désigne un espace vectoriel euclidien (e.v.e.) de dimension 3 (sauf mention contraire).

On note $(.\,|\,.)$ ou **.** son produit scalaire.

1. Orientation. Produit mixte.

1.1 Définition : *orientation de l'espace*

Soit E un e.v.e. de dimension n.

Orienter E, c'est choisir une base B de E.

Soit B' une autre base de E. On dit que :

- B' est directe lorsque $\det_B B' > 0$
- B' est indirecte lorsque $\det_B B' < 0$

Remarque : on démontre que la relation $\mathscr{R}$ définie sur E par :

$$B \mathscr{R} B' \Leftrightarrow \det_B B' > 0$$

est une relation d'équivalence qui comporte deux classes que l'on appelle "orientations" de E

Remarque : cette définition reste valable sans l'hypothèse "E euclidien".

Pour la suite, on suppose que E est orienté.

Orientation d'un plan P dans un e.v.e. E de dimension 3 orienté par une base B :

Soit (u, v) une base de P.

Orienter le plan P, c'est choisir un vecteur w normal à P tel que la base (u, v, w) soit directe.

1.2. Propriété : *invariance du déterminant par changement de base orthonormée directe*

Soit E un e.v.e. de dimension n.

Soient B et B' des bases orthonormées **directes** de E et $v_1, v_2, \dots, v_n$ des vecteurs de E. Alors :

$$\det_B (v_1, v_2, \dots, v_n) = \det_{B'} (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Démonstration :

Soit P la matrice de passage de la base B à la base B' : $P = \mathrm{Pass}(B, B') = \mathrm{Mat}_B (B') = \mathrm{Mat}_{B', B} (\mathrm{Id}_E)$

Pour tout vecteur $x \in E$, on a, en notant $X = \mathrm{mat}_B(x)$ et $X' = \mathrm{mat}_{B'}(x)$: $X = PX'$

Or, les bases B et B' sont orthonormées (donc $P \in O_n(\mathbb{R})$ d'où $\det P = 1$ ou -1) et directes (donc $\det P > 0$).

En conséquence, $\det P = 1$ d'où :

$$\det_B (v_1, v_2, \dots, v_n) = \det_P (v_1, v_2, \dots, v_n) \times \det_{B'} (v_1, v_2, \dots, v_n) = \det_{B'} (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

1.3. Définition : *produit mixte*

Soit E un e.v.e. de dimension n.

On appelle produit mixte des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$ de E leur déterminant dans une base orthonormée directe quelconque. On le note :

$$\mathbf{D}\mathrm{et}(v_1, v_2, \dots, v_n) \text{ ou encore } [v_1, v_2, \dots, v_n]$$

Le produit mixte de n vecteurs ne dépend donc pas de la base orthornormée directe choisie.

Par contre, il dépend de l'orientation.

Pour la suite, $n = 3$.

1.4. Propriétés du produit mixte :

L'application :
$$\begin{aligned} E\times E\times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v, w) &\longmapsto [u, v, w] \end{aligned}$$

est une **forme trilinéaire alternée** qui vaut 1 pour les bases orthonormées directes.

En particulier : $[u, v, w] = 0 \iff u, v$ et w coplanaires

Démonstration :

C'est une forme trilinéaire alternée car le déterminant de trois vecteurs l'est.

Elle vaut 1 pour les bases othonormées directes car le déterminant d'une matrice orthogonale directe vaut 1.

On a : $[u, v, w] = 0 \iff \mathbf{D}\text{et}(u, v, w) = 0 \iff u, v$ et w liés

Et comme E est de dimension 3: $[u, v, w] = 0 \iff u, v$ et w coplanaires

2. Produit vectoriel

2.1. Théorème (Riesz-Fischer)

Soient u et v deux vecteurs de E.

a) L'application :
$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto [u, v, x] \end{aligned}$$

est une forme linéaire.

b) Il existe un unique vecteur a de E tel que :

$$\forall x \in E,\ \varphi(x) = [u, v, x] = a \cdot x$$

Démonstration :

a) φ est une forme linéaire puisque le déterminant est linéaire par rapport à la dernière place.

Preuve de b) analytiquement :

- Unicité : s'il existe a et a' tels que : $\forall x \in E,\ [u, v, x] = a \cdot x = a' \cdot x$

  Alors : $\forall x \in E, (a - a') \cdot x = 0$

  Donc le vecteur $a - a'$ est orthogonal à tout vecteur de E. C'est donc le vecteur nul d'où : $a = a'$.

- Existence :

  Soit $B = (i, j, k)$ une base orthonormée directe de E. On sait qu'alors :

  $$[u, v, x] = \det_B(u, v, x)$$

  Notons U la matrice constituée des vecteurs colonnes u, v et x exprimés dans la base B :

  Notons là : $$U = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{pmatrix}$$

  On a alors : $$\det_B(u, v, x) = \det(U) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix}$$

  Ceci prouve, au passage, que les coordonnées de a (qui par définition n'est autre que $u \wedge v$) sont : $(u_2v_3 - u_3v_2 ; -u_1v_3 + u_3v_1 ; u_1v_2 - u_2v_1)$

  En développant suivant la dernière colonne :

  $$[u, v, x] = \det(U) = x_1(u_2v_3 - u_3v_2) - x_2(u_1v_3 - u_3v_1) + x_3(u_1v_2 - u_2v_1)$$

  Posons : $$a = (u_2v_3 - u_3v_2)\, i + (-(u_1v_3 - u_3v_1))\, j + (u_1v_2 - u_2v_1)\, k$$

Ainsi, on a bien : $[u, v, x] = a \cdot x$

Autre démonstration de b) à l'aide du dual E^* de E :

On considère l'application :
$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E^* \\ a &\longmapsto \phi_a : E \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad\quad x \longmapsto a \cdot x \end{aligned}$$

f est une application linéaire :

$\forall a, b \in E, \lambda \in \mathbb{R},$

$$\forall x \in E, f(a + \lambda b)(x) = \phi_{a+\lambda b}(x) = (a + \lambda b) \cdot x = a \cdot x + \lambda\, b \cdot x = \phi_a(x) + \lambda\phi_b(x) = f(a)(x) + \lambda f(b)(x)$$

$$f(a + \lambda b) = f(a) + \lambda f(b)$$

f est injective :

$\forall a, b \in E,$

$$f(a) = f(b)$$
$$\forall x \in E,\ f(a)(x) = f(b)(x)$$
$$\forall x \in E,\ a \cdot x = b \cdot x$$
$$\forall x \in E,\ (a - b) \cdot x = 0$$
$$a - b \text{ est orthogonal à tout vecteur de } E$$
$$a - b = 0$$
$$a = b$$

Or : $\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{R})) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{R}) = \dim(E)$

Donc f est un **isomorphisme de E sur E^***.

Or, on a vu que $\varphi \in E^*$. Donc : $\exists\,!\, a \in E \mid f(a) = \varphi$

C'est-à-dire : $\exists\,!\, a \in E \mid \forall x \in E,\ \varphi(x) = f(a)(x) = a \cdot x$

2.2. Définition : le vecteur a défini ci-dessus, s'appelle produit vectoriel de u et v. On le note :

$$a = u \wedge v$$

Pour trois vecteurs u, v et w quelconques, on a donc :

$$\boxed{[u, v, w] = (u \wedge v) \cdot w}$$

On a également, par alternance du déterminant et symétrie du produit scalaire :

$$[u, v, w] = -[v, u, w] = [v, w, u] = (v \wedge w) \cdot u = u \cdot (v \wedge w)$$

D'après la première démonstration de 2.1, on a également :

2.3. Expression analytique du produit vectoriel

Soit $B = (i, j, k)$ une base orthonormée directe de E.

En notant (x, y, z) et (x', y', z') les coordonnées respectives de u et v dans la base B, on a :

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} k$$

2.4. Propriétés du produit vectoriel :

- L'application $\wedge$ (de E^2 dans E) est **anticommutative, bilinéaire et non associative**.
- $u \wedge v \perp u$ et $u \wedge v \perp v$
- $u \wedge v = 0 \Leftrightarrow u$ et v sont colinéaires
- Si u et v sont non liés alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe de E

Démonstration :

Soient $u, v, v' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Anticommutativité :

$$\forall w \in E, (v \wedge u) \cdot w = [v, u, w] = -[u, v, w] = -(u \wedge v) \cdot w$$

Et par unicité du vecteur $v \wedge u$ (Théorème 2.1.) :

$$v \wedge u = -u \wedge v$$

- Bilinéarité :

Linéarité par rapport à la deuxième place :

$$\forall w \in E, \ (u \wedge (v + \lambda v')) \cdot w = [u, v + \lambda v', w]$$

Par trilinéarité du produit mixte :

$$[u, v + \lambda v', w] = [u, v, w] + \lambda[u, v', w]$$

D'où : $(u \wedge (v + \lambda v')) \cdot w = (u \wedge v) \cdot w + \lambda(u \wedge v') \cdot w = (u \wedge v + \lambda(u \wedge v')) \cdot w$

Et par unicité de $u \wedge (v + \lambda v')$:

$$u \wedge (v + \lambda v') = u \wedge v + \lambda(u \wedge v')$$

Linéarité par rapport à la première place :

$$(v + \lambda v') \wedge u = -u \wedge (v + \lambda v') = -u \wedge v - \lambda(u \wedge v') = v \wedge u + \lambda(v' \wedge u)$$

- Non associativité : voir un peu plus bas.
- On a : $(u \wedge v) \cdot u = [u, v, u] = 0$ donc $u \wedge v \perp u$

De même : $u \wedge v \perp v$

- Supposons : $u \wedge v = 0$

Alors : $\forall w \in E, (u \wedge v) \cdot w = 0$

$$\forall w \in E, [u, v, w] = 0$$

Donc, d'après 1.4. : $\forall w \in E$, u, v et w coplanaires

Si u et v non liés alors : $\forall w \in E, w \in \text{Vect}(u, v)$

D'où : $E \subset \text{Vect}(u, v)$

Ce qui est absurde car $\dim \text{Vect}(u, v) = 2$.

Donc : u et v sont colinéaires

Réciproquement, supposons : u et v sont colinéaires

Alors : $\forall\, w \in E,\ [u, v, w] = 0$

$$\forall\, w \in E,\ (u \wedge v) \cdot w = 0$$

D'où : $u \wedge v = 0$

On en déduit la <u>non associativité du produit vectoriel</u> :

Il suffit de choisir deux vecteurs u et v non nuls et non liés.

On a donc, par contraposition de ce qui précède : $u \wedge v \neq 0$

On constate alors que : $(u \wedge u) \wedge v = 0 \wedge v = 0$

Supposons que : $u \wedge (u \wedge v) = 0$

Alors u et $u \wedge v$ sont liés

Ce qui est absurde car : $u \wedge v \perp u$

Donc : $u \wedge (u \wedge v) \neq 0$

D'où : $(u \wedge u) \wedge v \neq u \wedge (u \wedge v)$

Ce qui prouve la non associativité du produit vectoriel.

- Si u et v sont non liés.

  Comme on a vu que $u \wedge v$ est orthogonal à u et v, $(u, v, u \wedge v)$ est bien une base de E.

  Montrons qu'elle est directe. Soit B une base orthonormée directe de E

$$\det_B(u, v, u \wedge v) = [u, v, u \wedge v] = (u \wedge v) \cdot (u \wedge v) > 0$$

  Donc la base $(u, v, u \wedge v)$ est bien directe.

<u>2.5. Formule du double produit vectoriel</u>

$$u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)\, v - (u \cdot v)\, w$$

<u>Démonstration</u> :

- Si $v = 0$, la formule est évidente.
- Si $v \neq 0$ et $w = \lambda\, v$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) alors :

$$(u \cdot w)\, v - (u \cdot v)\, w = \lambda(u \cdot v)\, v - \lambda(u \cdot v)\, v = 0 = u \wedge (v \wedge w)$$

- Supposons (v, w) libre.

  Posons $i = \dfrac{v}{\| v \|}$ et choisissons j dans $\mathrm{Vect}(v, w)$ tel que (i, j) soit une base orthonormée.

  Choisissons enfin k tel que (i, j, k) soit une base othonormée directe de E.

  On a alors des relations de la forme :

$$v = \alpha i\ ;\ w = \beta i + \gamma j \quad \text{et} \quad u = ai + bj + ck$$

  On calcule alors :

$$v \wedge w = \alpha(i \wedge (\beta i + \gamma j)) = \alpha\gamma\, i \wedge j = \alpha\gamma\, k \quad \text{d'où} \quad u \wedge (v \wedge w) = -a\alpha\gamma\, j + b\alpha\gamma\, i$$

  Et d'autre part :

$$(u \cdot w)\, v - (u \cdot v)\, w = (a\beta + b\gamma)\, v - a\alpha\, w = a\alpha\beta\ i + b\alpha\gamma\, i - a\alpha\beta\ i - a\alpha\gamma\, j = -a\alpha\gamma\, j + b\alpha\gamma\, i$$

  D'où : $u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)\, v - (u \cdot v)\, w$

Une autre démonstration :

On considère les applications :

$$\begin{aligned} \varphi : E^3 &\to \mathbb{R} \\ (u, v, w) &\mapsto u \wedge (v \wedge w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi : E^3 &\to \mathbb{R} \\ (u, v, w) &\mapsto (u \cdot w)\, v - (u \cdot v)\, w \end{aligned}$$

φ et ϕ sont des formes trilinéaires.

Soit $B = (i, j, k)$ une base orthonormée directe de E.

Vérifions que φ et ϕ coïncident sur une base de E^3 (qui est de dimension $3^3 = 27$)

Une base de E^3 s'obtient en considérant tous les triplets de vecteurs formés des vecteurs de la base B de E :

$$((i, i, i), (i, i, j), \ldots , (k, k, k))$$

On a :

$$\varphi(i, i, i) = i \wedge (i \wedge i) = 0$$

$$\phi(i, i, i) = (i \cdot i)\, i - (i \cdot i)\, i = 0$$

$$\varphi(i, i, j) = i \wedge (i \wedge j) = i \wedge k = -j$$

$$\phi(i, i, j) = (i \cdot j)\, i - (i \cdot i)\, j = -j$$

On procède de même pour les autres "triplets vecteurs" de la base de E^3.

On en déduit que, puisque φ et ϕ coïncident sur une base de E^3, elle sont égales sur E^3.

Remarque : on a également :

$$(u \wedge v) \wedge w = -w \wedge (u \wedge v) = (u \cdot w)\, v - (v \cdot w)\, u$$

Exercice : à l'aide de la formule du double produit vectoriel, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w$$

Cette égalité équivaut à :

$$(u \cdot w)\, v - (u \cdot v)\, w = (u \cdot w)\, v - (v \cdot w)\, u$$

$$(u \cdot v)\, w = (v \cdot w)\, u$$

Donc u et w sont liés.

Réciproquement, si u et w sont liés alors : $w = \lambda\, u \ \ (\lambda \in \mathbb{R})$

On a alors, d'une part : $(u \cdot v)\, w = \lambda(u \cdot v)\, u$

Et d'autre part : $(v \cdot w)\, u = \lambda(u \cdot v)\, u$

D'où : $u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w$

On conclut : $u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w \iff u$ et w liés

Ce qui montre, d'une autre façon qu'en 2.3., que le produit vectoriel n'est, en général, pas associatif.

2.6. Identité de Lagrange : $(u \cdot v)^2 + \| u \wedge v \|^2 = \| u \|^2 \times \| v \|^2$

Démonstration :

$$\| u \wedge v \|^2 = (u \wedge v) \cdot (u \wedge v) = [u, v, u \wedge v] = [v, u \wedge v, u] = (v \wedge (u \wedge v)) \cdot u$$

Mais d'après la formule du double produit vectoriel :

$$v \wedge (u \wedge v) = (v \cdot v)u - (v \cdot u)\, v$$

D'où : $$\| u \wedge v \|^2 = \| u \|^2 \times \| v \|^2 - (u \cdot v)^2$$

Remarque : soit $B(i, j, k)$ une b.o.n.d. de E telle que $u, v \in \mathrm{Vect}(i, j)$. Alors l'identité de Lagrange s'écrit :

$$(xx' + yy')^2 + (x'y - xy')^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)$$

(où $u(x, y, 0)$ et $v(x', y', 0)$ dans la base B)

2.7. Conséquence

Si θ désigne l'angle géométrique de u et v on a :

$$\| u \wedge v \| = \| u \| \times \| v \| \sin\theta, \quad (\theta \in [0, \pi])$$

Démonstration :

Utilisons l'identité de Lagrange :

$$\| u \wedge v \|^2 = \| u \|^2 \times \| v \|^2 - (u \cdot v)^2 = \| u \|^2 \times \| v \|^2 (1 - \cos^2(u, v)) = \| u \|^2 \times \| v \|^2 \sin^2(u, v)$$

Et comme θ est un angle géométrique, $\sin\theta > 0$ d'où :

$$\| u \wedge v \| = \| u \| \times \| v \| \sin\theta$$

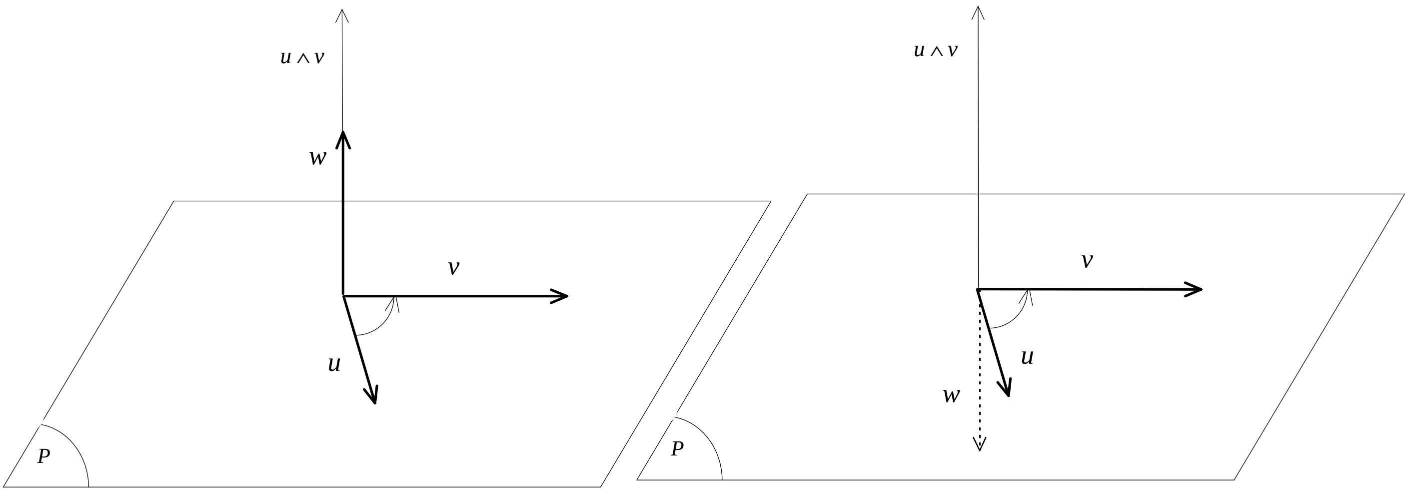
2.8. Théorème :

Soient u et v deux vecteurs non liés et P le plan engendré par u et v. Soit w un vecteur **unitaire** orientant P.

Alors : $$u \wedge v = \| u \| \times \| v \| \sin(u, v)\, w$$

Où (u, v) désigne l'angle orienté de u et v selon w dans le plan P.

Démonstration : Découle du fait que $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe.



angle orienté (u, v) positif

angle orienté (u, v) négatif

2.9. Exercice

E est un e.v.e. de dimension 3.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme antisymétrique. (C'est-à-dire : $\forall (x, y) \in E^2$, $(f(x) \mid y) = -(x \mid f(y))$)

1. Démontrer que $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.
2. Démontrer que f est de rang pair.
3. Démontrer qu'il existe un unique $a \in E$ tel que : $\forall x \in E$, $f(x) = a \wedge x$.

Solution :

Existence

Soit A la matrice de f dans une base orthonormée de E.

A est donc antisymétrique : $$A = -{}^{t}A$$

On a donc : $$\det(A) = \det(-{}^{t}A) = (-1)^3 \det({}^{t}A) = -\det(A)$$

Donc : $$\det(A) = 0$$

A, et donc f n'est en conséquence pas inversible d'où :

$$\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$$

Si $f = 0$, alors $a = 0$ convient.

Supposons désormais $f \neq 0$. Alors Ker f est de dimension 1 ou 2.

On a donc : $$\operatorname{rg} f = 2 \text{ ou } 1$$

Nous allons montrer que rg $f = 2$.

Montrons tout d'abord que $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

Soient x et y dans E.

On a : $$x \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow (f(x) \mid y) = -(x \mid f(y)) = 0$$

D'où : $$\operatorname{Im} f \perp \operatorname{Ker} f$$

En conséquence : $$\operatorname{Im} f \subset (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$$

Or, d'après le théorème du rang : $$\dim \operatorname{Im} f = 3 - \dim \operatorname{Ker} f$$

En outre : $$\dim (\operatorname{Ker} f)^{\perp} = 3 - \dim \operatorname{Ker} f$$

D'où : $$\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$$

D'autre part, il est clair que Im f est stable par f, donc l'endomorphisme g induit par f sur Im f est toujours antisymétrique (pour le produit scalaire induit).

Si Im f est de dimension 1 alors il existe $u \in E$, non nul, tel que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}u$.

Donc : $$g(u) = ku \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Et comme g est antisymétrique : $$(u \mid g(u)) = -(g(u) \mid u)$$
$$k \|u\|^2 = -k\|u\|^2$$

Et comme u est non nul : $$k = 0$$

Donc f serait nulle sur Im f.

Or, on a vu que $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$ donc $$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$$

Donc f serait nulle sur E, absurde.

On en déduit : rg $f = 2$ et dim Ker $f = 1$.

Soient (i, j) une base orthonormée de Im f et k tel que (i, j, k) soit une base orthonormée directe de E.

Comme f est antisymétrique, la matrice de f dans la base (i, j, k) est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule alors : $\alpha k \wedge i = \alpha j = f(i)$

$$\alpha k \wedge j = -\alpha i = f(j)$$

$$\alpha k \wedge k = 0 = f(k)$$

Posons $a = \alpha k$. Par coïncidence sur une base de f et $x \mapsto \alpha k \wedge x$, on déduit :

$$\forall x \in E,\ f(x) = a \wedge x$$

<u>Unicité</u> :

Supposons : $\forall x \in E,\ f(x) = a \wedge x = b \wedge x$

En particulier pour $x = a$: $0 = b \wedge a$

Donc a et b sont liés : $b = \lambda a,\ \lambda \in \mathbb{R}$

Alors : $\forall x \in E,\ f(x) = a \wedge x = \lambda\, a \wedge x$

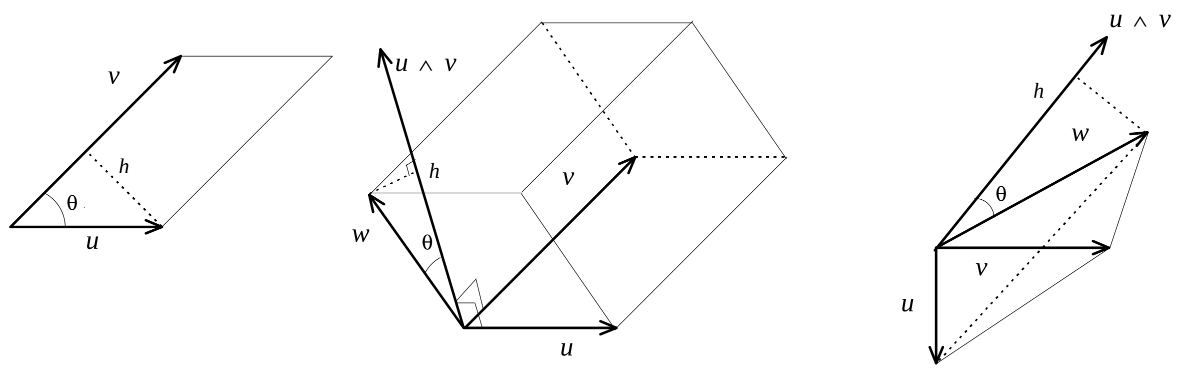
En particulier pour un x tel que $a \wedge x \neq 0$, on obtient : $\lambda = 1$

D'où : $b = a$

3. Applications

<u>3.1. Interprétation géométrique du produit vectoriel et du produit mixte</u> :

- $\| u \wedge v \|$ est l'aire du parallélogramme construit sur u et v.
- $| [u, v, w] |$ est le volume du parallélépipède construit sur u, v et w.
- $\dfrac{1}{6} | [u, v, w] |$ est le volume du tétraèdre construit sur u, v et w.



<u>Démonstration</u> :

Pour le parallélogramme :

$$\text{Aire} = \text{Base} \times \text{Hauteur} = \| v \| \times h = \| v \| \times \| u \| \times \sin\theta = \| u \wedge v \|$$

Pour le parallélépipède :

$$\text{Volume} = \text{Base} \times \text{Hauteur} = \| u \wedge v \| \times h = \| u \wedge v \| \times \| w \| \times \cos\theta = |(u \wedge v) \cdot w| = | [u, v, w] |$$

Pour le tétraèdre :

$$\text{Volume} = \frac{1}{3}\times \text{Base} \times \text{Hauteur} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \| u \wedge v \| \times \| w \| \times \cos\theta = \frac{1}{6} | [u, v, w] |$$

3.2. Distance d'un point à une droite. D'un point à un plan

Soit E un e.v.e. de dimension 3 et $\mathscr{E}$ l'espace affine associé.

Soit $D = (A, \vec{u})$ et $M \in \mathscr{E}$. Alors :

$$d(M, D) = \frac{\| \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \|}{\| \vec{u} \|}$$

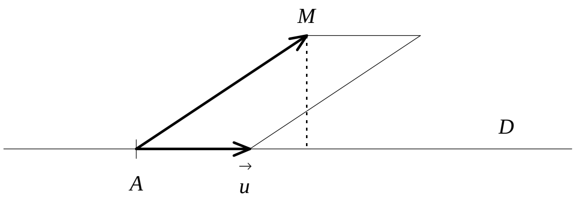
Soit $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $M \in \mathscr{E}$. Alors :

$$d(M, P) = \frac{|[\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}]|}{\| \vec{u} \wedge \vec{v} \|}$$

Démonstration :

C'est un conséquence immédiate de 3.1.

On calcule l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ et on divise par la longueur $\| \vec{u} \|$ de la base pour avoir la hauteur du parallélogramme qui n'est autre que d(M, D).



On procède de même pour calculer la distance d'un point M à un plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$: on calcule le volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AM}$ (ce volume vaut $|[\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}]|$) et on divise par l'aire de la base (qui est $\| \vec{u} \wedge \vec{v} \|$) pour obtenir la hauteur h du parallélépipède que n'est autre que d(M, P).

3.3. Rotations de E. Calcul explicite de l'angle.

Soit f une rotation de E d'angle θ. Notons i un vecteur **unitaire** orientant son axe.

On peut déterminer θ à l'aide des deux conditions suivantes :

$$\operatorname{tr}(f) = 1 + 2\cos\theta$$

sin θ est du signe du produit mixte $[x, f(x), i]$ où x est un vecteur quelconque non colinéaire à i

Démonstration :

On sait qu'il existe une base orthonormée directe $B = (i, j, k)$ de E dans laquelle la matrice de f est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

On a alors : $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = 1 + 2\cos\theta$

Soit $x \in E$, non colinéaire à i.

Notons (α, β, γ) les coordonnées de x dans la base B.

Les coordonnées de $f(x)$ se calculent par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta\cos\theta - \gamma\sin\theta \\ \beta\cos\theta + \gamma\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$[x, f(x), i] = \det_B(x, f(x), i) = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ \beta & \beta\cos\theta - \gamma\sin\theta & 0 \\ \gamma & \beta\cos\theta + \gamma\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = (\beta^2 + \gamma^2)\sin\theta$$

Comme $\beta^2 + \gamma^2 \neq 0$ car x est non colinéaire à i, on en déduit :

sin θ est du signe du produit mixte $[x, f(x), i]$

<u>3.4. Corps des quaternions</u>

Soit E un e.v.e. de dimension 3.

Soit $H = \mathbb{R} \times E$ muni des deux l.c.i. suivantes :

$$(\alpha, u) + (\beta, v) = (\alpha + \beta, u + v)$$
$$(\alpha, u) \times (\beta, v) = (\alpha\beta - u \cdot v, \alpha v + \beta u + u \wedge v)$$

Alors H est un corps non commutatif. (Appelé corps des Quaternions)

<u>Démonstration</u> :

- $(H, +)$ est un groupe commutatif
- $(1,0)$ est neutre pour la loi $\times$.
- Associativité de la loi $\times$:

$$[(\alpha, u) \times (\beta, v)] \times (\gamma, w) = (\alpha\beta - u \cdot v, \alpha v + \beta u + u \wedge v) \times (\gamma, w)$$
$$= ((\alpha\beta - u \cdot v)\gamma - (\alpha v + \beta u + u \wedge v) \cdot w, (\alpha\beta - u \cdot v) w + \gamma(\alpha v + \beta u + u \wedge v) + (\alpha v + \beta u + u \wedge v) \wedge w)$$

La première coordonnée est égale à :

$$\alpha\beta\gamma - \gamma u \cdot v - \alpha v \cdot w - \beta u \cdot w + [u, v, w]$$

qui est une expression symétrique en α, β, γ et u, v, w.

La deuxième coordonnée est égale à :

$$\alpha\beta w - (u \cdot v) w + \alpha\gamma v + \beta\gamma u + \gamma u \wedge v + \alpha v \wedge w + \beta u \wedge w + (u \wedge v) \wedge w$$

Qui se calcule à l'aide de la formule du double produit vectoriel :

$$(u \wedge v) \wedge w = (u \cdot w) v - (v \cdot w) u$$

D'où l'expression suivante :

$$\alpha\beta w - (u \cdot v) w + \alpha\gamma v + \beta\gamma u + \gamma u \wedge v + \alpha v \wedge w + \beta u \wedge w + (u \cdot w) v - (v \cdot w) u$$

Ce qui est l'expression obtenue en calculant la deuxième coordonnée de $(\alpha , u) \times [(\beta , v) \times (\gamma , w)]$. (On fait confiance ?)

- La distributivité est laissée à titre d'exercice.
- Enfin, explicitons le calcul de l'inverse, pour $\times$, de tout élément non nul :

  On définit, sur H, une notion de conjugaison :

$$\overline{(\alpha, u)} = (\alpha, -u)$$

  On vérifie qu'alors : $(\alpha , u) \times \overline{(\alpha, u)} = \overline{(\alpha, u)} \times (\alpha , u) = (\alpha^2 + \| u \|^2)(1, 0)$

  Donc si $(\alpha, u) \neq (0, 0)$, on a : $(\alpha, u)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha^2 + \| u \|^2}(\alpha, -u)$

Enfin, on peut remarque que la loi $\times$ est non commutative :

Si $B = (i, j, k)$ est une base orthonormée directe de E, on a :

$$(0, i) \times (0, j) = (0, -k) \quad \text{et} \quad (0, j) \times (0, i) = (0, k)$$

3.5. Division vectorielle

Soient $u, v \in E$ avec u non nul.

L'équation $$u \wedge x = v$$

d'inconnue x admet des solutions si et seulement si $u \cdot v = 0$.

Dans ce cas, les solutions sont de la forme :

$$x = \lambda\, u - \frac{1}{\| u \|^2}\, u \wedge v \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Démonstration :

Supposons que l'équation $u \wedge x = v$ admette au moins une solution x.

Alors : $$u \wedge (u \wedge x) = u \wedge v$$

D'après la formule de double produit vectoriel :

$$(u \cdot x)\, u - \| u \|^2\, x = u \wedge v$$

Et comme u est non nul :

$$x = \lambda\, u - \frac{1}{\| u \|^2}\, u \wedge v \text{ avec } \lambda = \frac{u \cdot x}{\| u \|^2}$$

Réciproquement, si x est de la forme :

$$x = \lambda\, u - \frac{1}{\| u \|^2}\, u \wedge v \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Alors : $$u \wedge x = -\frac{1}{\| u \|^2}\, u \wedge (u \wedge v) = -\frac{1}{\| u \|^2}\, (u \cdot v)\, u + v$$

x est donc solution si et seulement $u \cdot v = 0$