LA PARABOLE DANS LE PLAN AFFINE EUCLIDIEN

Remarques générales

Cette leçon de synthèse est difficile car il faut organiser soi-même de manière cohérente les multiples résultats éparpillés dans la littérature.

Plan

1. Notion de parabole

a) Théorème et définitions

Soit P une partie du plan. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) Il existe une droite D et un point $F \notin D$ tels que P soit la médiatrice de D et de F.
(ii) Il existe un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et un réel $p > 0$ tels que P ait pour équation cartésienne $y^2 = 2px$.

Dans ce cas, D, F et p sont uniques et $(O, \vec{i}, -\vec{j})$ est le seul autre repère qui convienne. On dit que P est la <u>parabole</u> de <u>directrice</u> D, de <u>foyer</u> F, de <u>paramètre</u> p, de <u>sommet</u> O, d'<u>axe</u> $(O, \vec{i})$ et d'<u>équation réduite</u> $y^2 = 2px$. L'<u>intérieur</u> (resp. <u>extérieur</u>) de P est l'ensemble des points M tels que $MF < d(M, D)$ (resp. $MF > d(M, D)$).

b) Equation cartésienne dans un repère orthonormé quelconque

Soit $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ un repère orthonormé quelconque. P est une parabole ssi P a une équation cartésienne de la forme $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$, avec $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \neq 0$.

c) Equation polaire lorsque le foyer est à l'origine

Soit $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ un repère orthonormé direct. P est une parabole de foyer Ω ssi P a une équation polaire de la forme $\rho(1 + \cos(\theta - \varphi)) = p$ avec $\varphi \in \mathbf{R}$ et $p > 0$. Dans ce cas, P a pour paramètre p et pour directrice la droite d'équation polaire $\rho \cos(\theta - \varphi) = p$.

2. Etude de la forme et construction de la courbe

a) Remarques diverses sur la forme de la courbe

- Le groupe des isométries de P est {id, s}, où s est la réflexion d'axe $(O, \vec{i})$.
- Une droite coupe P en 0, 1 ou 2 points.
- L'intérieur de P est convexe.
- Deux paraboles quelconques sont semblables. Elles sont isométriques ssi elles ont le même paramètre p.

b) Construction

1ère méthode : P est la réunion des courbes représentatives des fonctions $x \to \sqrt{2px}$ et $x \to -\sqrt{2px}$ (ou la courbe représentative de la fonction $y \to \dfrac{y^2}{2p}$).

2ème méthode : P est l'ensemble des centres des cercles tangents à D et passant par F, d'où une construction par points à la règle et au compas.

3. Autres propriétés

a) Propriétés différentielles de la courbe

• P admet en tout point M_0 (x_0, y_0) une tangente (aux divers sens du terme) d'équation $\boxed{yy_0 = p(x + x_0)}$.
• Courbure, centre de courbure, développée.
• Longueur d'un arc de parabole.
• Aire d'un segment de parabole (*Résultat d'Archimède* : "un segment quelconque compris par une droite et une parabole est égal à quatre fois le tiers d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment").

b) Propriétés géométriques des tangentes et normales

Soient M un point quelconque de P, H son projeté orthogonal sur D, K son projeté orthogonal sur (OF). La tangente en M coupe l'axe en T et la directrice en U ; la normale en M coupe l'axe en N. On a les propriétés géométriques suivantes :

1) (MT) est la médiatrice de [FH] et la bissectrice intérieure de $\widehat{FMH}$ (application : miroirs paraboliques).

2) $\widehat{MFU} = \pi/2$.

3) F est le milieu de [TN] et $\overline{KN} = p$.

Exercice 1 : De tout point M extérieur à P, on peut lui mener deux tangentes. En donner une construction. Elles sont perpendiculaires ssi M est sur D.

Exercice 2 : Les normales en trois points distincts A, B, C de P sont concourantes ssi le centre de gravité du triangle ABC est sur l'axe de P.

c) Théorème de l'angle pivotant

Si M désigne le point d'intersection de deux tangentes à P en deux points distincts A et B, la droite (FM) est la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB})$. Si une troisième tangente à P coupe les tangentes en A et B respectivement en S et T, l'angle de droites (FS, FT) ne dépend que de A et de B et vaut $\frac{1}{2}(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB})$.

Bibliographie

RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX, *Cours de mathématiques spéciales, tome 2*, Masson
TRIGNAN, *Les coniques*, Vuibert
LEHMANN et BKOUCHE, *Initiation à la géométrie*, PUF
AVEZ, *La leçon de géométrie à l'oral de l'agrégation*, Masson