L’ELLIPSE DANS LE PLAN AFFINE EUCLIDIEN

Remarques générales

• Cette leçon de synthèse est difficile car il faut organiser soi-même de manière cohérente les multiples résultats éparpillés dans la littérature.

• On a choisi ici de mettre en valeur les propriétés “affines” de l’ellipse, à partir de sa figure réduite qu’est le cercle. On peut aussi se consacrer aux propriétés différentielles et cinématiques de la courbe (courbure, développée, longueur d’un arc d’ellipse : fonctions elliptiques, mouvement des planètes, *etc*).

Plan

1. Notion d’ellipse

a) Théorème et définitions

Soit E une partie du plan. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe deux points distincts F et F’ et un réel $a > \frac{FF'}{2}$ tels que E soit le lieu des points M vérifiant MF + MF’ = 2a. *(Définition bifocale)*

(ii) Il existe un cercle C et un point F intérieur à C et distinct de son centre tels que E soit la médiatrice de C et de F. *(Définition par foyer et cercle directeur)*

(iii) Il existe une droite D, un point $F \notin D$ et un réel $e \in]0, 1[$ tels que E soit le lieu des points M vérifiant MF = e d(M, D). *(Définition par foyer et directrice)*

(iv) Il existe un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et des réels a > b > 0 tels que E ait pour équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. *(Définition par équation réduite)*

Dans ce cas, on dit que E est une ellipse. A partir d’une étude précise des liens entre les quatre définitions, on définit les foyers, les cercles directeurs, les directrices, l’excentricité, le grand axe (ou axe focal), le petit axe, le centre, les sommets, le cercle principal, le cercle secondaire.

Si on pose $c = \frac{FF'}{2}$, on a $\boxed{e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}$, et la directrice associée au foyer (c, 0) a pour équation $\boxed{x = \frac{a^2}{c}}$.

Un cercle peut être considéré comme une ellipse si on étend la définition (i) (prendre F = F’), la définition (ii) (prendre F au centre de C) ou la définition (iv) (prendre a = b). Par contre, ce n’est pas possible pour la définition (iii).

b) Symétries et construction de la courbe

• Le groupe des isométries de E est $\{id, s_O, s_1, s_2\}$, où s_O est la symétrie centrale de centre O, s_1 la réflexion d’axe $(O, \vec{i})$ et s_2 la réflexion d’axe $(O, \vec{j})$.
• Deux ellipses sont semblables ssi elles ont la même excentricité.
• L’intérieur de E est convexe.
• Les définitions (i), (ii) et (iii) permettent des constructions par points à la règle et au compas. La définition (i) permet aussi un tracé continu (“construction du jardinier”). On peut enfin, grâce à la définition (iv), se ramener à l’étude et à la représentation graphique d’une fonction numérique d’une variable réelle.

c) Equation cartésienne dans un repère orthonormé quelconque

Soit $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ un repère orthonormé quelconque. E est une ellipse ssi E a une équation cartésienne de la forme $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$, avec $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$ et $a \times \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} < 0$.

d) Equation polaire lorsque le foyer est à l'origine

Soit $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ un repère orthonormé direct. E est une ellipse de foyer Ω ssi E a une équation polaire de la forme $\rho(1+e\cos(\theta-\varphi)) = p$ avec $\varphi \in$ **R**, $e \in$]0, 1[et $p > 0$. Dans ce cas, E a pour excentricité e et pour directrice la droite d'équation polaire $\rho \cos(\theta - \varphi) = p/e$.

2. <u>La figure réduite de l'ellipse : le cercle</u>

a) Effet d'une transformation affine sur une ellipse

• L'image d'une ellipse par une transformation affine est une ellipse. • Une ellipse est l'image de son cercle principal par l'affinité orthogonale d'axe l'axe focal et de rapport b/a. • Etant donnés une ellipse E et un cercle C, il existe une transformation affine f telle que f(C) = E.

b) Applications

• *Aire de l'ellipse :* L'aire de l'ellipse est πab.
• *Tangentes à l'ellipse :* Une ellipse admet une tangente en chacun de ses points $M_0(x_0, y_0)$, d'équation $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$. Construction de cette tangente. Construction par tangentes de l'ellipse. Construction des tangentes menées à l'ellipse d'un point quelconque du plan.
• *Théorème de Pascal :* Les côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une ellipse se coupent en trois points alignés.
• *Ellipse de Steiner :* Il existe une unique ellipse tangente aux trois côtés d'un triangle en leurs milieux.

3. <u>Propriétés angulaires de l'ellipse</u>

• *Propriété angulaire des tangentes :* La tangente en un point M d'une ellipse de foyers F et F' est la bissectrice extérieure de l'angle $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$.

• *Théorème de l'angle pivotant :* Si M désigne le point d'intersection des tangentes à une ellipse de foyer F en deux points distincts A et B, la droite (FM) est la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB})$. Si une troisième tangente à l'ellipse coupe les tangentes en A et B respectivement en S et T, l'angle de droites (FS, FT) ne dépend que de A et de B et vaut 1/2 $(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB})$.

4. <u>L'ellipse dans l'espace</u>

• *L'ellipse en tant que section cylindrique :* La section d'un cylindre de révolution par un plan faisant avec l'axe du cylindre un angle $\varphi \in$]0, $\pi/2$] est une ellipse d'excentricité $\cos \varphi$.

• *L'ellipse en tant que section conique :* La section d'un cône de révolution de sommet S et de demi-angle au sommet $\theta \in$]0, $\pi/2$[par un plan ne passant pas par S et faisant avec l'axe du cône un angle $\varphi \in$]θ, $\pi/2$] est une ellipse d'excentricité $\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}$.

Remarque : Toute ellipse est donc une perspective (cylindrique ou conique) de cercle. On pourra s'interroger en particulier sur la représentation en perspective cavalière (*ie* cylindrique) d'une sphère.

Bibliographie

RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX, *Cours de mathématiques spéciales, tome 2*, Masson
LEHMANN et BKOUCHE, *Initiation à la géométrie*, PUF
AVEZ, *La leçon de géométrie à l'oral de l'agrégation*, Masson
DELTHEIL et CAIRE, *Géométrie et compléments*, Gabay
LEBOSSÉ et HÉMERY, *Géométrie, Classe de Mathématiques*, Gabay