CERCLES DANS LE PLAN

Remarques générales

• Le programme est bref et assez vague : “En dimension 2 : cercles. Equation polaire d’un cercle passant par l’origine. Puissance d’un point par rapport à un cercle. Faisceaux linéaires de cercles.” Pourtant les cercles interviennent constamment en géométrie et les résultats sont innombrables : chacun pourra bâtir une leçon très personnelle.

• Attention : le paragraphe 4 (qu’on peut limiter aux similitudes) suppose connu le théorème fondamental de la géométrie affine.

Plan

1. Le cercle dans le plan

• Définition.
• Intersection d’un cercle et d’une droite, de deux cercles.
• Equation cartésienne, représentations paramétriques et équation complexe d’un cercle, équation polaire d’un cercle passant par l’origine.
• Lieu des points M tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = k$. Lieu des points M tels que $\frac{MA}{MB} = k$ *(cercles d’Appolonius)*.

2. Condition de cocyclicité de quatre points

• Avec des angles de droites : $\boxed{\text{A, B, C, D sont cocycliques ou alignés ssi (AC, AD) = (BC, BD).}}$

• Avec des nombres complexes : $\boxed{\text{A, B, C, D sont cocycliques ou alignés ssi le birapport } \frac{d-a}{c-a}\Big/\frac{d-b}{c-b} \text{ est réel.}}$

• Avec des distances : $\boxed{\text{A, B, C, D sont cocycliques ou alignés dans cet ordre ssi AC.BD = AB.CD + AD.BC.}}$
(théorème de Ptolémée)

> Exercice 1 : *(Droite de Simson)*. L’ensemble des points qui se projettent en des points alignés sur les côtés d’un triangle est le cercle circonscrit.
>
> Exercice 2 : Les cercles circonscrits aux quatre triangles d’un quadrilatère complet sont concourants.

3. Puissance d’un point par rapport à un cercle. Faisceaux de cercles

a) Puissance d’un point par rapport à un cercle

• On appelle <u>puissance du point M par rapport au cercle Γ,</u> de centre O, de rayon R et d’équation normale $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, le nombre $\boxed{P_\Gamma(M) = OM^2 - R^2 = x^2 + y^2 + ax + by + c}$. Pour toute droite passant par M et rencontrant Γ en A et B (A = B si c’est une tangente), on a $\boxed{P_\Gamma(M) = \overline{MA}.\overline{MB}}$.

• Axe radical de deux cercles non concentriques ; construction. Centre radical de trois cercles dont les centres ne sont pas alignés.

> Exercice 3 : *(Théorème de Pascal)*. Les côtés opposés d’un hexagone inscrit dans un cercle se coupent en trois points alignés.
>
> Exercice 4 : Construire un cercle passant par deux points donnés et tangent à un cercle donné.

b) Faisceaux linéaires de cercles

• Etant donnés deux cercles distincts C_1 et C_2, d'équations normales $f_1(M) = 0$ et $f_2(M) = 0$, on appelle faisceau linéaire de cercles de base C_1 et C_2 l'ensemble des cercles d'équation normale $\lambda f_1(M) + (1 - \lambda) f_2(M) = 0$, avec $\lambda \in \mathbf{R}$. Remarque : deux cercles distincts quelconques du faisceau sont aussi des cercles de base du faisceau.

• *Description du faisceau F de cercles de base C_1 et C_2* :

1) Si C_1 et C_2 ont le même centre Ω, alors F est l'ensemble des cercles de centre Ω. On dit que F est un faisceau concentrique.

2) Supposons C_1 et C_2 non concentriques. Par un point M du plan, il passe un et un seul cercle de F si M n'appartient pas à l'axe radical de C_1 et C_2, tous les cercles de F si $M \in C_1 \cap C_2$, aucun cercle de F sinon.

- Si $C_1 \cap C_2 = \{A, B\}$, F est l'ensemble des cercles contenant A et B. On dit que F est le faisceau à points de base A et B.
- Si C_1 et C_2 ont une tangente commune D en A, F est l'ensemble des cercles tangents à D en A. On dit que F est un faisceau tangent.
- Si C_1 et C_2 sont disjoints, F contient exactement deux cercles points P et Q et les cercles de F sont centrés sur (PQ) \ ]PQ[. On dit que F est le faisceau à points limites P et Q.

4. Transformations conservant les cercles

a) Similitudes

Les bijections du plan dans lui-même qui transforment tout cercle en un cercle sont exactement les similitudes.

Exercice 5 : Construire un cercle passant par un point donné et tangent à deux droites données.

b) Inversions

On travaille désormais dans le plan conforme $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ et on appelle "cercle" soit un cercle de $\mathbf{C}$, soit la réunion d'une droite de $\mathbf{C}$ et du point à l'infini. L'inversion de pôle P et de puissance k ($k \neq 0$) est l'application i définie par $i(P) = \infty$, $i(\infty) = P$ et sinon $i(M) = M'$ où M' est le point de (PM) tel que $\overline{PM}.\overline{PM'} = k$.

Une inversion est une bijection involutive qui transforme tout cercle en un cercle.

c) Transformations circulaires

Les bijections du plan conforme dans lui-même qui transforment tout cercle en un cercle sont exactement les homographies $z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$ et les antihomographies $z \to \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ ($ad - bc \neq 0$).

Bibliographie

RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX, *Cours de mathématiques spéciales, tome 2*, Masson
BERGER, *Géométrie, tome 2*, CEDIC/Nathan
TISSERON, *Géométries affine, projective et euclidienne*, Hermann
LEHMANN et BKOUCHE, *Initiation à la géométrie*, PUF
COXETER, *Introduction to geometry*, Wiley