Leçon 201 : Suites de nombres réels

I Definitions

Définition 1. :

on appelle suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Le terme u(n) est appelé n-ième terme de la suite et on le note u_n La suite u est notée $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$

Notation : L'ensemble des suites dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. C'est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Définition 2.

Une suite réelle $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est dite majorée lorsque $\exists M \epsilon \mathbb{R}$ tel que ($\forall n \epsilon \mathbb{N}$), $x_n < M$

Une suite réelle $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est dite minorée lorsque $\exists M \epsilon \mathbb{R}$ tel que ($\forall n \epsilon \mathbb{N}$), $x_n > M$

Une suite réelle $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est dite bornée lorsqu'elle est minorée et majorée.

Ex :

Définition 3.

Une suite $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite croissante lorsque $\forall$ (n,p) $\epsilon\ \mathbb{N}^2$,($n < p \Rightarrow x_n \leqslant x_p$)

Une suite $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite décroissante lorsque $\forall$ (n,p) $\epsilon\ \mathbb{N}^2$,($n < p \Rightarrow x_n \geqslant x_p$)

Une suite est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.

II) Convergence , Divergence et prop de la limite

1. convergence et divergence

Définition 4. :

$(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ converge vers l si : $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 \epsilon \mathbb{N}$ tel que ($n > n_0 \Rightarrow |u_n - l\,| < \varepsilon$)

$(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ converge si : $\exists\ l \epsilon \mathbb{R}$ tel que $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ converge vers l.

Propriété 1.

- la limite est unique et on la note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$;

- une suite convergente est bornée ;

Ex :

Définition 5 (Limite infinie). :

Soit $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}\epsilon\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On dit que $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite si $\forall\ A\ \epsilon\ \mathbb{R}$, $\exists\ n_0\ \epsilon\ \mathbb{N}$ tel que ($n > n_0 \Rightarrow u_n > A$).

De même pour $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$

Définition 6. *$(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ diverge si et seulement si $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ ne converge pas*

Ex :

2. opérations sur les limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$
l	l'	l + l'
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \text{ x } v_n)$
l>0	$+\infty$	$+\infty$
l<0	$+\infty$	$-\infty$
l>0	$-\infty$	$-\infty$
l<0	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

3.prop de la lim

Propriété 2.

- 2 suites qui diffèrent que par un nombre fini de termes sont de même nature

et si elles convergent, elles ont même lim

- Soit des suites $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ convergentes, de limites respectives a et b alors

($\forall\ n\ \epsilon\ \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$) $\Rightarrow a \leqslant b$

Théorème 1 (th des gendarmes).

Soient $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ telles que :

(1)$\forall\ n\ \epsilon\ \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$)

(2)les suites $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ sont convergentes et de même limite l

alors $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

III) Propriétés des suites réelles

Définition 7.

Soit $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}\epsilon\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si :

$\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ n_0\ \epsilon\ \mathbb{N}$, (n , p $> n_0 \Rightarrow |$ un - up $| < \epsilon$)

Propriété 3.

- une suite de Cauchy est bornée.

- une suite convergente est de Cauchy.

Propriété 4.

Toute suite réelle de Cauchy est convergente . $\mathbb{R}$ est complet

Théorème 2.

$(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}\epsilon\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Si $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée), alors elle converge vers sa borne sup. Si elle n'est pas majorée (resp. minorée), elle tend vers + ∞ (resp.- ∞).

Définition 8.

Si deux suites sont l'une croissante, l'autre décroissante, et si leur différence tend vers 0, alors elles sont dites adjacentes.

Propriété 5.

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

Théorème 3 (th des segments emboîtés).

L'intersection d'une suite décroissante de segments dont la longueur tend vers 0 est un singleton.

Définition 9.

Soit $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}\epsilon\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Une suite extraite de $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(u_{\sigma(n)})_{n\epsilon\mathbb{N}}$ où $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, est une application strictement croissante.

Propriété 6.

$(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ converge vers l $\Rightarrow \forall\ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, $(u_\sigma(n))_{n\epsilon\mathbb{N}}$ converge vers l.

Si $(u_{2n})_{n\epsilon\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\epsilon\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l, alors $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ converge vers l.

Théorème 4 (Bolzano-Weierstrass).

De toute suite bornée réelle , on peut en extraire une suite convergente.