SUITES DE NOMBRES RÉELS

SOMMAIRE

1. Convergence. Divergence. Généralités **1**

1.1. Définition 2

1.2. Propriété : unicité de la limite 3

1.3. Définition : suites de Cauchy. 3

1.4. Propriété : (u_n) converge $\Rightarrow$ (u_n) de Cauchy $\Rightarrow$ (u_n) bornée. Exemple : divergence de la série harmonique 3

1.5. Opérations algébriques sur les suites convergentes 4

1.6. Opérations algébriques sur les suites divergentes vers $+\infty$ 5

1.7. Théorème : suites et applications continues. Exemple : $x \mapsto \cos\frac{1}{x}$ ne peut pas se prolonger par continuité en 0. 6

1.8. Cas des suites récurrentes 7

1.9. Théorème de Cesaro 8

2. Quelques théorèmes de comparaison et d'encadrement **9**

2.1. et 2.2. Théorèmes de compatibilité avec l'ordre 9

2.3. Cas des suites divergentes vers $+\infty$ ou $-\infty$. Exemple : divergence vers $+\infty$ de la série harmonique. 10

2.4. Théorème des "gendarmes". Exercice : $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k} \to 2$. 10

2.5. Théorème de la limite monotone 11

2.5.1. Application : constante d'Euler 12

2.5.2. Une suite monotone est soit convergente soit divergente (vers $+\infty$ ou $-\infty$) 12

2.6. Suites adjacentes 13

2.6.1. Application 1 : nombre **e** 14

2.6.2. Application 2 : moyenne arithmético-géométrique 15

2.7. Théorème des segments emboîtés 16

3. Suites extraites. Valeur d'adhérence. Théorème de Bolzano-Weierstrass **16**

3.1. Définition : suite extraite et valeur d'adhérence 16

3.2. Théorème : lien entre la limite d'une suite et celle de ses extraites. Exercice : divergence de $(\cos n)$ 17

3.3. Propriété : suite extraite des termes pairs et suite extraite des termes impairs 18

3.4. Théorème de Bolzano-Weierstrass 19

3.4.1. $\mathbb{R}$ est complet 20

3.4.2. Théorème de Heine 21

3.4.3. Théorème : une suite bornée n'admettant qu'une seule valeur d'adhérence converge 22

4. Quelques applications **23**

4.1. Théorème : fonction continue sur un segment 23

4.2. Théorème spécial à certaines séries alternées 24

1. Convergence. Divergence. Généralités

1.1. Définition

- On dit qu'une suite (u_n) converge vers un réel ℓ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

- Si un tel réel ℓ n'existe pas, on dit que (u_n) diverge.

Avec les quantificateurs, la divergence s'écrit :
$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon)$

- On dit qu'une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A)$$

- On dit qu'une suite (u_n) diverge vers $-\infty$ si $(-u_n)$ diverge vers $+\infty$, autrement dit :

$$\forall B \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant B)$$

$\boxed{B = -A}$

Exemples de manipulation directe de cette définition :

1. Démontrer que la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ diverge.

   Supposons au contraire qu'elle converge vers un certain réel ℓ :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow |(-1)^n - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

   Avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, cela donne :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow \ell - \frac{1}{2} \leqslant (-1)^n \leqslant \ell + \frac{1}{2})$$

   Pour un entier n pair tel que $n \geqslant N$, on a : $\ell - \frac{1}{2} \leqslant 1 \leqslant \ell + \frac{1}{2}$

   Donc : $\ell \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

   Pour un entier n impair tel que $n \geqslant N$: $\ell - \frac{1}{2} \leqslant -1 \leqslant \ell + \frac{1}{2}$

   Donc : $\ell \in [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$

   Absurde, donc (u_n) diverge.

   On verra plus loin une autre démonstration à l'aide des suites extraites.

2. Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

   Le calcul des premiers termes de (v_n) nous amène à la conjecture : (v_n) converge vers le réel 0. Montrons-le.

   Fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

   On cherche à prouver l'existence d'un entier N tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow |v_n| \leqslant \varepsilon)$$

   C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow 1 \leqslant n\varepsilon)$

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow n \geqslant \frac{1}{\varepsilon})$$

On constate qu'il suffit de choisir : $N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1 \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$

Donc (v_n) converge vers 0.

<u>1.2. Propriété</u> *Unicité de la limite*

Si (u_n) converge alors sa limite ℓ est unique

<u>Démonstration</u> :

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons :

- (u_n) converge vers ℓ_1 : $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_1 \Rightarrow |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon)$
- (u_n) converge vers ℓ_2 : $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_2 \Rightarrow |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon)$

Posons $N = \max(N_1 ; N_2)$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow |\ell_1 - \ell_2| \leqslant |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| \leqslant 2\varepsilon)$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient : $\ell_1 = \ell_2$

<u>Notation</u> :

la convergence de (u_n) vers ℓ se note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

la divergence de (u_n) vers $+\infty$ se note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

<u>1.3. Définition</u> *Suites de Cauchy*

On dit qu'une suite (u_n) est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p > q \geqslant N \Rightarrow |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon)$$

<u>Remarque</u> : par négation, (u_n) n'est pas de Cauchy lorsque :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p > q \geqslant N \text{ et } |u_p - u_q| > \varepsilon)$$

<u>1.4. Propriétés</u>

(u_n) converge $\Rightarrow$ (u_n) de Cauchy $\Rightarrow$ (u_n) bornée

<u>Démonstration</u> :

Supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

Soient maintenant des entiers p et q tels que : $p > q \geqslant N$

D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$|u_p - u_q| \leqslant |u_p - \ell| + |u_q - \ell| \leqslant 2\varepsilon$$

Ce qui prouve que la suite (u_n) est de Cauchy.

(On verra, plus loin que, pour les suites réelles, la réciproque est vraie)

Comme (u_n) est de Cauchy, on a avec $\varepsilon = 1$ et $q = N$:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (p \geqslant N_1 \Rightarrow |u_p - u_N| \leqslant 1)$$

C'est-à-dire : $p \geqslant N_1 \Rightarrow u_N - 1 \leqslant u_p \leqslant u_N + 1$

Posons : $M = \max\{|u_0| ; ... ; |u_{N-1}| , |u_N + 1|\}$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$

Donc (u_n) est bornée.

Exemple :

Montrer la divergence de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{(Série harmonique)}$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_{2N} - u_N = \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = \frac{1}{N+1} + ... + \frac{1}{2N} > N\ \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}$$

Donc, il existe un ε (à savoir $\frac{1}{2}$) tel que pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$, il existe un couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ (à savoir $q = N$ et $p = 2N$) vérifiant $p > q \geqslant N$ et $|u_p - u_q| > \varepsilon$.

Ce qui prouve que la suite (u_n) **n'est pas de Cauchy**.

D'après la contraposée de 1.4., on en déduit que (u_n) ne converge pas, donc (u_n) diverge.

On verra plus loin que (u_n) diverge vers $+\infty$.

1.5. Opérations algébriques sur les suites convergentes

a) (u_n) converge vers ℓ_1 et (v_n) converge vers $\ell_2 \Rightarrow (u_n + v_n)$ converge vers $\ell_1 + \ell_2$.

b) (u_n) bornée et (v_n) converge vers $0 \Rightarrow (u_nv_n)$ converge vers 0.

c) (u_n) converge vers ℓ_1 et (v_n) converge vers $\ell_2 \Rightarrow (u_nv_n)$ converge vers $\ell_1\ell_2$.

d) (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.

Démonstration :

a) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_1 \Rightarrow |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon)$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_2 \Rightarrow |v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon)$$

Posons $N = \max(N_1 ; N_2)$. On a alors :

$$n \geqslant N \Rightarrow |(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_2)| \leqslant |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| \leqslant 2\varepsilon$$

Ce qui prouve que $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell_1 + \ell_2$.

b) Comme (u_n) est bornée :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme (v_n) converge vers 0 :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow |v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M})$$

Donc : $$n \geqslant N \Rightarrow |u_n v_n| \leqslant \varepsilon$$

Ce qui prouve que la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.

c) On écrit : $$u_n v_n - \ell_1 \ell_2 = (u_n - \ell_1)v_n + \ell_1(v_n - \ell_2)$$

On a :

$$\begin{cases} u_n - \ell_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ (v_n) \text{ bornée (car convergente)} \end{cases}$$

D'après b), on déduit $(u_n - \ell_1)v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

De même, on montre que $\ell_1(v_n - \ell_2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Et d'après a), on déduit $u_n v_n - \ell_1 \ell_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d'où c).

d) Quitte à changer u_n en son opposé, on peut supposer $\ell > 0$.

Comme (u_n) converge vers ℓ :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

En particulier avec $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, on obtient :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_1 \Rightarrow 0 < \frac{\ell}{2} \leqslant u_n)$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Toujours, comme (u_n) converge vers ℓ :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_2 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

Pour $n \geqslant \max(N_1 ; N_2)$ on a alors :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|\ell - u_n|}{u_n \ell} \leqslant \frac{2\varepsilon}{\ell^2}$$

Ce qui prouve que $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.

1.6. Opérations algébriques sur les suites divergentes vers $+\infty$

a) (u_n) diverge vers $+\infty \Rightarrow \left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers 0.

b) (u_n) converge vers 0 et (u_n) strictement positive $\Rightarrow \left(\frac{1}{u_n}\right)$ diverge vers $+\infty$.

c) (u_n) converge vers $\ell > 0$ et (v_n) diverge vers $+\infty \Rightarrow (u_n v_n)$ diverge vers $+\infty$.

Démonstration :

a) (u_n) diverge vers $+\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A)$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $A = \dfrac{1}{\varepsilon}$, on obtient :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant \frac{1}{\varepsilon})$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{1}{u_n}\right| \leqslant \varepsilon)$$

Donc $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ converge vers 0.

b) Fixons $A \in \mathbb{R}_+^*$. Comme (u_n) converge vers 0, on a avec $\varepsilon = \dfrac{1}{A}$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant \frac{1}{A})$$

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow \frac{1}{u_n} \geqslant A)$$

Donc $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ diverge vers $+\infty$.

c) Comme (u_n) converge vers $\ell > 0$, on obtient avec $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2}$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow 0 < \frac{\ell}{2} \leqslant u_n)$$

Comme (v_n) diverge vers $+\infty$:

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N' \Rightarrow v_n \geqslant \frac{2A}{\ell})$$

Pour tout $n \geqslant \max(N, N')$, on a alors : $u_n v_n \geqslant A$

Ce qui prouve bien que $(u_n v_n)$ diverge vers $+\infty$.

<u>1.7. Théorème</u> *Suites et applications continues*

Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit (u_n) une suite d'éléments de X convergeant vers un réel $\ell \in X$.

Soit f une application continue en ℓ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

La suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Démonstration :

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, comme f est continue en ℓ, on a:

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que : } (|x - \ell| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(\ell)| < \varepsilon)$$

Mais la suite (u_n) converge vers ℓ. Donc pour ce réel η ci-dessus, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \eta$$

On a donc, par transitivité des implications :

$$n \geqslant N \Rightarrow |f(u_n) - f(\ell)| < \varepsilon$$

Ceci prouve que la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Dans la pratique, on utilise souvent la version contraposée de 1.7, en ce sens : si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et si les suites $(f(u_n))$ et $((f(v_n))$ convergent vers des limites différentes, alors f n'est pas continue en ℓ.

<u>Exemple</u> :

Soit $\lambda \in [-1, 1]$.

Soit :
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ \lambda & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors f n'est pas continue en 0.

En effet, supposons le contraire.

Considérons la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{1}{2\pi n}$

Comme on a supposé f continue en 0, le théorème 1.6. permet d'affirmer qu'alors :

$$f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0)$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(u_n) = 1$ et $f(0) = \lambda$

Donc : $\lambda = 1$

Mais, considérons maintenant la suite (v_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$

Le même raisonnement que ci-dessus montre que : $\lambda = 0$

D'où une contradiction.

Donc f n'est pas continue en 0.

<u>1.8. Conséquence du théorème 1.7.</u>

Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit f continue sur X telle que $f(X) \subset X$.

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in X \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Si (u_n) converge vers ℓ alors $f(\ell) = \ell$

<u>Démonstration</u> :

Immédiat en passant à la limite dans l'égalité : $u_{n+1} = f(u_n)$

1.9. Exercice : théorème de CESARO

Soit (u_n) une suite convergeant vers un réel ℓ.

Alors la suite (v_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par : $v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$

converge également vers ℓ.

Autrement dit, le théorème de Césaro affirme que la convergence entraîne la convergence en moyenne.

(On dit que (u_n) converge en moyenne vers ℓ ou converge au sens de Césaro)

Démonstration :

Fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme (u_n) converge vers ℓ :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, (k \geqslant N \Rightarrow |u_k - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

Pour $n > N$, on a :

$$v_n - \ell = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell)$$

$$|v_n - \ell| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k - \ell| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k - \ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|u_k - \ell|$$

Posons $A_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k - \ell|$.

Il est clair $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc : $\exists N' \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N' \Rightarrow |A_n| \leqslant \varepsilon)$

Pour $n > \max(N, N')$, on a alors :

$$|v_n - \ell| \leqslant A_n + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|u_k - \ell| \leqslant \varepsilon + \frac{n-N}{n}\varepsilon \leqslant 2\varepsilon$$

Ce qui prouve bien que (v_n) converge vers ℓ.

Compléments sur le théorème de CESARO :

1. Une suite qui converge en moyenne ne converge pas nécessairement. Autrement dit, la réciproque du théorème de Césaro est fausse. Voici un contre-exemple :

   $$u_n = (-1)^n$$

   On vu que (u_n) diverge tandis que (v_n) définie par $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0.

2. Le théorème de Césaro admet un prolongement pour les suites divergentes vers $+\infty$:

Soit (u_n) une suite divergeant vers $+\infty$.

Alors la suite (v_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par : $v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$

diverge également vers $+\infty$.

Démonstration :

Fixons $A \in \mathbb{R}_+^*$.

Par hypothèse : $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_0 \Rightarrow u_n \geqslant 3A)$

Pour $n > N_0$, on a :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N_0+1}^{n} u_k \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0} u_k + 3\frac{n-N_0}{n}A$$

Posons $A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0} u_k$, ainsi : $v_n \geqslant A_n + 3A - 3\frac{N_0}{n}A$

Il est clair $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc : $\exists N_1 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_1 \Rightarrow -A \leqslant A_n \leqslant A)$

De même, $-3\frac{N_0}{n}A \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_2 \Rightarrow -A \leqslant -3\frac{N_0}{n}A \leqslant A)$$

Si bien que pour $n \geqslant \max(N_0, N_1, N_2)$, on a :

$$v_n \geqslant -A + 3A - A$$

$$v_n \geqslant A$$

Ce qui prouve bien que (v_n) diverge vers $+\infty$.

Dans cette version encore, la réciproque du théorème de Césaro est fausse. (Voir 3.3.)

2. Quelques théorèmes de comparaison et d'encadrement

2.1. Théorème *compatibilité avec l'ordre*

Si (u_n) converge et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ (resp. $\geqslant 0$)

Alors : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \geqslant 0$

Les inégalités deviennent toutes larges lorsqu'on passe à la limite

Démonstration :

Notons $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ et supposons $\ell < 0$.

Pour $\varepsilon = -\frac{\ell}{2}$ (noter qu'on a bien $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$), la convergence de (u_n) s'écrit :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant \frac{\ell}{2} < 0)$$

Ce qui contredit l'hypothèse de positivité. Donc $\ell \geqslant 0$.

2.2.Conséquence

Si (u_n) et (v_n) convergent et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$ (resp. $u_n \leqslant v_n$)

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Démonstration :

On applique 2.1. à la suite $(v_n - u_n)$.

2.3. Théorème

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$

Si (u_n) diverge vers $+\infty$ alors (v_n) diverge vers $+\infty$.

Si (v_n) diverge vers $-\infty$ alors (u_n) diverge vers $-\infty$

Démonstration :

Fixons $A \in \mathbb{R}_+^*$. Comme (u_n) diverge vers $+\infty$:

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A)$$

Et comme $v_n \geqslant u_n$:

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \Rightarrow v_n \geqslant A)$$

Donc (v_n) diverge vers $+\infty$.

Idem pour le second énoncé.

Exemple :

Prouver que la série harmonique diverge vers $+\infty$.

D'après la décroissance de l'application $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $]0\,;+\infty[$ on a immédiatement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{(Illustrer)}$$

En sommant, pour n allant de 1 à N : $\quad 0 \leqslant \ln(N+1) \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$

D'où la divergence vers $+\infty$ de la série harmonique.

2.4. Théorème d'encadrement ou des "gendarmes"

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que :

- $\exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_0 \Rightarrow u_n \leqslant v_n \leqslant w_n)$
- (u_n) et (v_n) convergent vers le même réel ℓ.

Alors (v_n) converge vers ℓ.

Démonstration :

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Par hypothèse :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_1 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_2 \Rightarrow |w_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

Pour $n \geqslant \max(N_0, N_1, N_2)$, on a :

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

Donc (v_n) converge vers ℓ.

Exercice :

Soit (u_n) la suite définie par : $$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k}$$

Démontrer que (u_n) converge vers 2.

Pour $n \geqslant 5$, on a :

$$u_n = \frac{1}{C_n^0} + \frac{1}{C_n^1} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{C_n^k} + \frac{1}{C_n^{n-1}} + \frac{1}{C_n^n} = 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{C_n^k}$$

Or, pour tout $k \in [\![2, n-2]\!]$: $$C_n^k \geqslant C_n^2 \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$$

Donc : $$0 \leqslant \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{C_n^k} \leqslant \frac{2(n-3)}{n(n-1)}$$

D'après le théorème des gendarmes, on déduit :

$$\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{C_n^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

D'où : $$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$$

2.5 Théorème *limite "monotone"*

Toute suite croissante et majorée converge

Toute suite décroissante et minorée converge

Démonstration :

Soit (u_n) une suite croissante et majorée.

On considère l'ensemble : $$\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$$

Cet ensemble étant non vide et majoré, il admet une borne supérieure $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N},\ \ell - \varepsilon < u_N \leqslant \ell$$

En particulier, avec $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$: $$\exists N \in \mathbb{N},\ \ell - \frac{1}{n} < u_n \leqslant \ell$$

Et comme (u_n) est croissante : $$\forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geqslant N \Rightarrow \ell - \frac{1}{n} < u_n \leqslant \ell\right)$$

Et d'après le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers ℓ.

Même raisonnement pour les suites minorées et décroissantes.

2.5.1. Application : constante d'Euler

On considère la suite $u = (u_n)$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

Nous allons montrer, à l'aide du théorème 2.5. que cette suite converge.

On montre que u est décroissante :

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Et, tenant compte de l'inégalité : $$\forall X \in\ ]-1, +\infty[,\ \ln(1 + X) \leqslant X$$

On obtient avec $X = -\frac{1}{n} \in\ ]-1, 0[$: $$u_n - u_{n-1} \leqslant 0$$

Ce qui prouve la décroissance de la suite u.

On montre que u est positive (i.e. minorée par 0) :

Par décroissance de l'application $t \longmapsto \frac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$, on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$$

En sommant pour k allant de 1 à $n - 1$:

$$\int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

D'où : $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant 0$$

Bilan : la suite u est décroissante et minorée (par 0) donc converge.

Sa limite, notée γ, s'appelle la constante d'Euler.

2.5.2. Conséquence du théorème de la limite monotone

$$(u_n) \text{ croissante} \Rightarrow ((u_n) \text{ converge ou } (u_n) \text{ diverge vers } +\infty)$$

Démonstration :

Soit (u_n) une suite croissante.

- Si (u_n) est majorée, alors elle converge, d'après 2.5.
- Si (u_n) n'est pas majorée : $$\forall M \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ u_N > M$$

  Et comme (u_n) est croissante : $$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant u_N \geqslant M)$$

  Ce qui prouve bien que (u_n) diverge vers $+\infty$.

On montre de même que :

$$(u_n) \text{ décroissante} \Rightarrow ((u_n) \text{ converge ou } (u_n) \text{ diverge vers } -\infty)$$

Application : hypothèse supplémentaire pour obtenir la réciproque du théorème de Césaro

Soit (u_n) une suite monotone.

Soit (v_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $\quad v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$

On suppose que (v_n) tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Alors (u_n) tend aussi vers ℓ.

Démonstration :

Comme (u_n) est monotone, elle converge ou diverge (vers $+\infty$ ou $-\infty$). Mais alors, d'après le théorème direct de Césaro, (v_n) aura le même comportement. Donc (u_n) se comporte bien comme (v_n).

2.6.1. Définition *Suites adjacentes*

Lorsque $\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante} \\ (v_n) \text{ est décroissante} \\ v_n - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases}$, on dit que les suite (u_n) et (v_n) sont adjacentes

Remarque : la condition $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$ est inutile dans les hypothèses. Elle découle des trois autres.

2.6.2. Théorème *Suites adjacentes*

Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ.

De plus : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ell \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$

Démonstration :

Montrons, tout d'abord : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad w_n = v_n - u_n$

On a : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$

Et d'après le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} - w_n \leqslant 0$$

Donc (w_n) est décroissante, c'est-à-dire : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$

On en déduit encore : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$

On prouve maintenant la convergence des suites (u_n) et (v_n) grâce au théorème de la limite monotone :

Comme, (u_n) est croissante et majorée par v_0, elle converge vers un certain réel ℓ.

Comme, (v_n) est décroissante et minorée par u_0, elle converge vers un certain réel ℓ'.

En écrivant enfin : $\quad u_n = v_n + (u_n - v_n)$

Un passage à la limite donne : $\quad \ell = \ell' + 0$

$$\ell = \ell'$$

Enfin, on a nécessairement : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell$

En effet, supposons le contraire : $\quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\ell < u_{n_0}$

Posons $\ell' = \dfrac{u_{n_0} + \ell}{2}$. ($\ell'$ est la moyenne de u_{n_0} et de ℓ et comme $\ell < u_{n_0}$, on a : $\ell < \ell' < u_{n_0}$).

Comme (u_n) est croissante, on a : $\forall n \geqslant n_0 \,,\, \ell' < u_n$

Et par passage à la limite : $\ell' \leqslant \ell$

Ce qui contredit $\ell < \ell'$... Donc on a bien : $u_n \leqslant \ell$

On démontre, de même, que : $\ell \leqslant v_n$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ell \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$

2.6.1. Application 1 : le nombre **e**

1. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_n = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{n!}$ et $y_n = x_n + \dfrac{1}{nn!}$ sont adjacentes.
2. Déterminer sept décimales de leur limite **e**.
3. Démontrer que **e** est un nombre irrationnel.

Remarque : on peut également poser $y_n = x_n + \dfrac{1}{n!}$. Les calculs sont plus simples mais la convergence (vers **e**) plus lente.

Solution :

1. La suite (x_n) est bien sûr croissante.

   Montrons que (y_n) est décroissante en calculant $y_{n+1} - y_n$:

$$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - x_n - \frac{1}{nn!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$

   Donc (y_n) est décroissante.

   Enfin on a : $y_n - x_n = \dfrac{1}{nn!}$

   Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} (y_n - x_n) = 0$

   Les suites (x_n) et (y_n) sont bien adjacentes donc admettent une limite commune (que l'on notera **e**)

2. On a donc, pour tout entier n : $x_n \leqslant \mathbf{e} \leqslant y_n$

   Il suffit de déterminer un entier n tel que : $\dfrac{1}{nn!} < 10^{-7}$

   $n = 10$ convient. Donc $\mathbf{e} \simeq x_{10}$ à 10^{-7} près.

   On obtient : $\mathbf{e} \simeq 2{,}7182818$ (à 10^{-7} près)

3. Supposons $\mathbf{e} \in \mathbb{Q}$. Alors, il existe des entiers p et q tels que $\mathbf{e} = \dfrac{p}{q}$.

   On aurait en particulier : $x_q < \dfrac{p}{q} < y_q$.

   En réduisant au même dénominateur la somme $x_q = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{q!}$, on peut écrire : $x_q = \dfrac{a}{q!}$ où $a \in \mathbb{N}$.

   D'où : $\dfrac{a}{q!} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{a}{q!} + \dfrac{1}{qq!}$

En multipliant par $q!$: $$a < p(q-1)! < a + \frac{1}{q} < a + 1$$

L'entier $p(q-1)!$ serait compris strictement entre a et $a+1$ qui sont des entiers consécutifs, ce qui est absurde. Donc $\mathbf{e} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Remarque : ceci prouve au passage, que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet (il existe des suites de rationnels qui convergent vers des irrationnels)

2.6.2. Application 2 : moyenne arithmético-géométrique

Soient a et b deux réels tels que $a > b > 0$.

Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par :

$$a_0 = a \;\; ; \;\; b_0 = b$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\; a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

Alors (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite.

Solution :

Il suffit de montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $$a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \frac{a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2}{4} - a_nb_n$$

$$(a_{n+1} - b_{n+1})(a_{n+1} + b_{n+1}) = \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2 \geqslant 0$$

Et comme (a_n) et (b_n) sont positives (faire une récurrence), il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\; a_{n+1} \geqslant b_{n+1}$$

Enfin, comme $a_0 > b_0$: $$\forall n \in \mathbb{N},\; a_n \geqslant b_n$$

Bien que ce résultat ne soit pas une hypothèse nécessaire du théorème des suites adjacentes, on l'utilise pour prouver les suivants :

- En effet, d'une part : $$\forall n \in \mathbb{N},\; a_{n+1} \leqslant \frac{a_n + b_n}{2} \leqslant \frac{a_n + a_n}{2} \leqslant a_n$$

  Donc la suite (a_n) est décroissante.

- D'autre part : $$\forall n \in \mathbb{N},\; b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_nb_n} - b_n = \sqrt{b_n}\,(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\,) \geqslant 0$$

  (par croissance de $t \longmapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$)

  Donc la suite (b_n) est croissante.

- On considère maintenant la propriété $\wp$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

  $$\wp(n) : |a_n - b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}\,|a-b|$$

  * On a bien sûr $\wp(0)$.
  * Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$:

    Supposons $\wp(n)$: $$|a_n - b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}\,|a-b|$$

    Alors : $$|a_{n+1} - b_{n+1}|^2 = \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2 \overset{\wp(n)}{\leqslant} \frac{1}{2^{2n+2}}\,|a-b|^2$$

Et par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$: $|a_{n+1} - b_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}|a - b|$

D'où $\wp(n+1)$.

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \wp(n) : |a_n - b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}|a - b|$$

D'où, par comparaison :
$$\lim_{n \to +\infty} (a_n - b_n) = 0$$

On a donc prouvé que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Elles convergent donc vers une même limite (appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b. On ne connaît pas d'expression de cette limite mais elle est liée aux intégrales elliptiques de 2$^{\text{ème}}$ espèce...)

<u>2.7. Corollaire</u> *Théorème des segments emboîtés*

Soient (a_n) et (b_n) deux suites telles que :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant b_n$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$
- $b_n - a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Alors :
$$\exists \ell \in \mathbb{R},\ \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\ell\}$$

<u>Démonstration</u> :

Par hypothèse, les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, elles convergent donc vers un même réel ℓ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$$

Donc :
$$\ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$$

Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Alors :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant x \leqslant b_n$$

Et par passage à la limite :
$$\ell \leqslant x \leqslant \ell$$

Donc :
$$x = \ell$$

3. Suites extraites. Valeur d'adhérence. Théorème de Bolzano-Weierstrass

<u>3.1. Définition</u> *Suite extraite. Valeur d'adhérence*

Une telle application σ s'appelle une extractrice.

Soit (u_n) une suite et $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

La suite $\left(u_{\sigma(n)}\right)$ s'appelle <u>suite extraite</u> de (u_n).

Si la suite $\left(u_{\sigma(n)}\right)$ converge vers ℓ, on dit que ℓ est une <u>valeur d'adhérence</u> de la suite (u_n)

<u>Remarque</u> : comme σ est strictement croissante, une simple récurrence montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sigma(n) \geqslant n$$

3.2. Théorème

Si une suite (u_n) tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors toute suite extraite tend vers ℓ

Démonstration :

Par "(u_n) **tend** vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$", il faut entendre :
"(u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ **ou** $(|u_n|)$ diverge vers $+\infty$"

Cas où $\ell \in \mathbb{R}$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme (u_n) converge vers ℓ :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

Et comme $\sigma(n) \geqslant n$: $\quad n \geqslant N \Rightarrow \sigma(n) \geqslant N \Rightarrow |u_{\sigma(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon$

Ce qui prouve que la suite $\left(u_{\sigma(n)}\right)$ converge vers ℓ.

Cas où $\ell = +\infty$

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme (u_n) diverge vers $+\infty$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A)$$

Et comme $\sigma(n) \geqslant n$: $\quad n \geqslant N \Rightarrow \sigma(n) \geqslant N \Rightarrow u_{\sigma(n)} \geqslant A$

Ce qui prouve que la suite $\left(u_{\sigma(n)}\right)$ diverge vers $+\infty$.

Cas où $\ell = -\infty$

Analogue au précédent.

L'intérêt du théorème 3.2 est sa contraposée :

S'il existe deux suites extraites de (u_n) qui convergent vers des limites différentes, alors (u_n) diverge.

On retrouve ainsi la divergence de la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$.

En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\quad u_{2p} = 1$ et $u_{2p+1} = -1$

Les suites extraites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) convergent vers des limites différentes, donc (u_n) diverge.

Exercice : divergence de la suite $(\cos n)$.

Supposons que la suite $(\cos n)$ converge vers un certain réel ℓ.

Rappel :
$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

D'une part : $\quad \cos(n+2) + \cos n = 2\cos(n+1)\cos 1$

Par passage à la limite : $\quad 2\ell = 2\ell\cos 1$

Et comme $\cos 1 \neq 0$: $\quad \ell = 0$

D'autre part : $\quad \cos(2n) = 2\cos^2 n - 1$

Par passage à la limite : $\quad \ell = 2\ell^2 - 1$

Ce qui contredit $\ell = 0$.

Donc la suite $(\cos n)$ diverge.

On montre, par des techniques similaires la divergence de la suite $(\sin n)$

La réciproque du théorème 3.2. est vraie. Elle découle, par exemple, du résultat suivant :

3.3. Propriété

$$(u_n) \text{ tend vers } \ell \in \overline{\mathbb{R}} \iff \text{les deux suites extraites } (u_{2p}) \text{ et } (u_{2p+1}) \text{ tendent vers } \ell.$$

Démonstration :

Le sens $\Rightarrow$ est le théorème 3.2.

Montrons la réciproque.

Cas où $\ell \in \mathbb{R}$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme (u_{2p}) converge vers ℓ : $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (p \geqslant N_1 \Rightarrow |u_{2p} - \ell| \leqslant \varepsilon)$

Comme (u_{2p+1}) converge vers ℓ : $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (p \geqslant N_2 \Rightarrow |u_{2p+1} - \ell| \leqslant \varepsilon)$

Posons $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$.

Soit $n \geqslant N$.

Si $n = 2p$, alors $p \geqslant N_1$ et : $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

Si $n = 2p + 1$, alors $p \geqslant N_2$ et : $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

Dans tous les cas, on a : $n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

Ce qui prouve que la suite (u_n) converge vers ℓ.

Cas où $\ell = +\infty$

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme (u_{2p}) diverge vers $+\infty$: $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (p \geqslant N_1 \Rightarrow u_{2p} \geqslant A)$

Comme (u_{2p+1}) diverge vers $+\infty$: $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (p \geqslant N_2 \Rightarrow u_{2p+1} \geqslant A)$

Posons $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$.

Soit $n \geqslant N$.

Si $n = 2p$, alors $p \geqslant N_1$ et : $u_n \geqslant A$

Si $n = 2p + 1$, alors $p \geqslant N_2$ et : $u_n \geqslant A$

Dans tous les cas, on a : $n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A$

Ce qui prouve que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Cas où $\ell = -\infty$

Analogue au précédent.

Remarques :

- On peut étendre ce résultat à des familles de suites extraites dont les images des extractrices forment une partition de $\mathbb{N}$ (et a fortiori un recouvrement de $\mathbb{N}$). Par exemple (u_{3p}), (u_{3p+1}) et (u_{3p+2}).
- Soit (u_n) une suite telle que toute suite extraite converge vers ℓ. Alors les suites extraites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) convergent vers ℓ. D'après 3.3. on en déduit que (u_n) converge vers ℓ ce qui prouve la réciproque de 3.2.

Application : contre-exemple à la réciproque du théorème de Césaro, version "divergence vers $+\infty$"

$$u_n = \begin{cases} n \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Il est clair que (u_n) diverge (considérer les suites extraites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) et utiliser 3.2.)

Montrons, cependant, que (u_n) diverge vers $+\infty$ au sens de Césaro :

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

On a, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{2p} = \frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{2p} u_k = \frac{1}{2p}\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2p} u_k = \frac{1}{2p}\sum_{j=1}^{p} u_{2j} = \frac{1}{2p}\sum_{j=1}^{p} 2j = \frac{p+1}{2}$$

$$v_{2p+1} = \frac{1}{2p+1}\sum_{k=1}^{2p+1} u_k = \frac{1}{2p+1}\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2p+1} u_k = \frac{1}{2p+1}\sum_{j=1}^{p} u_{2j} = \frac{1}{2p+1}\sum_{j=1}^{p} 2j = \frac{p(p+1)}{2p+1}$$

Les suites extraites (v_{2p}) et (v_{2p+1}) divergent toutes deux vers $+\infty$, donc la suite (v_n) aussi.

3.4. Théorème *Bolzano-Weiestrass*

Soit (u_n) une suite **bornée** de réels. Alors, on peut extraire de (u_n) une sous-suite convergente.

(Variante : toute suite bornée de réels admet une valeur d'adhérence)

Démonstration :

L'idée générale :

Notons a_0 (resp. b_0) la borne inférieure (resp. supérieure) de l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. (Existent car (u_n) bornée)

Posons $I_0 = [a_0, b_0]$ et c_0 le centre de I_0.

L'un, au moins, des deux intervalle $[a_0, c_0]$ et $[c_0, b_0]$ contient une **infinité de termes** de la suite (x_n). (On a bien dit une infinité de termes ; ce n'est pas forcément une infinité de valeurs)

Notons I_1 cet intervalle et c_1 son centre. On réitère le procédé ci-dessus avec le segment I_1.

On construit ainsi une suite de segments emboîtés dont la longueur tend vers 0. L'intersection de tous ces segments est donc un certain réel ℓ. En outre, par construction, chacun de ces segments contient au moins un terme de la suite (u_n). On peut donc construire une suite extraite en choisissant à chaque fois l'un de ces termes et cette suite converge nécessairement vers ℓ.

Mise en forme :

Soient $a_0 = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $b_0 = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_0 \leqslant u_n \leqslant b_0$$

Pour tous réels α et β tels que $a_0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant b_0$, notons :

$$N(\alpha, \beta) = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha \leqslant u_n \leqslant \beta\}$$

($N(\alpha, \beta)$ est l'ensemble des **indices** n pour lesquels $\alpha \leqslant u_n \leqslant \beta$)

On sait que $N(a_0, b_0)$ est infini. Posons $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

Comme $N(a_0, b_0) = N(a_0, c_0) \cup N(c_0, b_0)$, l'un, au moins, des deux ensembles $N(a_0, c_0)$ ou $N(c_0, b_0)$ est aussi infini.

Si $N(a_0, c_0)$ est infini alors on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$.

Si $N(c_0, b_0)$ est infini alors on pose $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$.

Le segment $[a_1, b_1]$ ainsi construit est ainsi tel que $N(a_1, b_1)$ soit infini.

Supposons maintenant $[a_n, b_n]$ construit tel que $N(a_n, b_n)$ soit infini. Posons $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

Comme $N(a_n, b_n) = N(a_n, c_n) \cup N(c_n, b_n)$, l'un, au moins, des deux ensembles $N(a_n, c_n)$ ou $N(c_n, b_n)$ est infini.

Si $N(a_n, c_n)$ est infini alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.

Si $N(c_n, b_n)$ est infini alors on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

On a ainsi construit, par récurrence, une suite $([a_n, b_n])$ de segments emboîtés :

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

De plus, par construction, la longueur de $[a_n, b_n]$ est $\dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$.

Les segments $[a_n, b_n]$ ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes.

Notons ℓ leur limite commune.

Reste à montrer qu'il existe une application σ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la suite $\left(u_{\sigma(n)}\right)$ converge vers ℓ.

Posons $\sigma(0) = 0$.

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit $\sigma(n)$ égal à un indice strictement supérieur à $\sigma(n-1)$ qui est situé dans $N(a_n, b_n)$. (Il en existe nécessairement puisque $N(a_n, b_n)$ est infini : on peut, par exemple, choisir le plus petit)

La suite $\left(u_{\sigma(n)}\right)$ est extraite de (u_n) et $a_n \leqslant u_{\sigma(n)} \leqslant b_n$ donc $\left(u_{\sigma(n)}\right)$ converge vers ℓ.

La réciproque du théorème de Bolzano-Weierstrass est bien sûr fausse. Considérons la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \begin{cases} n \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

La suite extraite (u_{2p+1}) est constante (égale à 0) donc converge, cependant, (u_n) n'est pas bornée.

Le théorème de Bolzano-Weiestrass admet de très nombreuses applications. Nous allons en donner quelques unes.

<u>3.4.1 Théorème</u> **$\mathbb{R}$ est complet**

Dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy converge.

<u>Démonstration</u> :

Soit (u_n) une suite de Cauchy.

Fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme (u_n) est de Cauchy, elle est bornée (1.4.). D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut donc en extraire une sous-suite convergente :

Il existe $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(u_{\sigma(n)}\right)$ converge vers un certain réel ℓ :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_1 \Rightarrow |u_{\sigma(n)} - \ell| \leqslant \varepsilon)$$

En outre, comme (u_n) est de Cauchy :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p \geqslant q \geqslant N_2 \Rightarrow |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon)$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant |u_n - u_{\sigma(n)}| + |u_{\sigma(n)} - \ell| \overset{\sigma(n) \geqslant n \geqslant N_2}{\leqslant} 2\varepsilon)$$

Ce qui prouve bien que (u_n) converge vers ℓ.

3.4.2. Théorème de Heine

Toute fonction numérique continue sur un segment I est uniformément continue sur ce segment I.

On rappelle qu'un segment est un intervalle fermé borné.

Démonstration :

Soit f une fonction continue sur I.

Supposons f non uniformément continue sur I.

Alors : $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, \exists (x ; y) \in I^2 \text{ tel que : } (|x - y| < \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon)$$

En particulier, en choisissant $\eta = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (x_n ; y_n) \in I^2 \text{ tel que : } (|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon) \qquad (1)$$

Comme ***I* est borné**, les suites (x_n) et (y_n) ainsi définies le sont également.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut donc en extraire des sous-suites qui convergent.

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ une application strictement croissante telle que la suite $\left(x_{\sigma(n)}\right)$ converge.

Notons ℓ sa limite. (On a nécessairement $\ell \in I$ puisque ***I* est fermé**).

Fixons $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$. On a donc :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_1 \Rightarrow |x_{\sigma(n)} - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon'}{2})$$

Mais, d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a d'après (1) :

$$|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| < \frac{1}{\sigma(n)}$$

Comme $\dfrac{1}{\sigma(n)}$ tend vers 0, on a :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_2 \Rightarrow \left|\frac{1}{\sigma(n)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon'}{2})$$

Pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, on a alors :

$$|y_{\sigma(n)} - \ell| \leqslant |y_{\sigma(n)} - x_{\sigma(n)}| + |x_{\sigma(n)} - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2} \leqslant \varepsilon'$$

Ceci prouve que la suite $\left(y_{\sigma(n)}\right)$ converge également vers ℓ.

Or, f étant continue sur I, on peut affirmer que les suites $\left(f\left(x_{\sigma(n)}\right)\right)$ et $\left(f\left(y_{\sigma(n)}\right)\right)$ convergent vers $f(\ell)$. Donc :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow \left|f(y_{\sigma(n)}) - f(x_{\sigma(n)})\right| < \varepsilon)$$

Ce qui contredit (1).

Conclusion : f est uniformément continue sur le segment I.

3.4.3. Théorème

Une suite bornée admettant une unique valeur d'adhérence ℓ converge vers ℓ

Démonstration :

Par l'absurde.

Soit (u_n) une suite bornée admettant une unique valeur d'adhérence ℓ.

Supposons que (u_n) ne converge pas vers ℓ :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon)$$

Alors l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - \ell| > \varepsilon\}$ est infini.

Soit $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow A$ strictement croissante. (Existe car A est une partie infinie de $\mathbb{N}$)

Ainsi : $$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\sigma(n)} - \ell| > \varepsilon$$

Comme la suite $\left(u_{\sigma(n)}\right)$ est bornée (car extraite de (u_n) qui l'est), on peut (Bolzano-Weierstrass) en extraire une sous-suite convergente :

Il existe $\sigma' : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(u_{\sigma o \sigma'(n)}\right)$ converge vers un certain réel ℓ'

On a alors : $$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\sigma o \sigma'(n)} - \ell| > \varepsilon$$

Et par passage à la limite $$|\ell' - \ell| \geqslant \varepsilon$$

Donc $\ell' \neq \ell$. La suite (u_n) aurait alors deux valeurs d'adhérences distinctes. Contradiction.

Donc (u_n) converge vers ℓ.

4. Quelques applications

<u>4.1. Théorème</u> *Fonction continue sur un segment*

Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

Alors f est **bornée sur I** et f **atteint ses bornes**.

C'est une application du théorème des segments emboîtés et du théorème de Bolzano-Weierstrass.

<u>Démonstration</u> :

<u>1. Montrons : f bornée sur I</u>

Supposons f non **bornée** sur I.

Soit c le milieu de I.

Posons $a_1 = a$ et $b_1 = c$ si f non bornée sur $[a, c]$.

Posons $a_1 = c$ et $b_1 = b$ sinon.

En réitérant ce procédé, on construit, par récurrence, une suite de segments emboîtés :

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$$

Sur chacun de ces intervalles, f est, par construction, non bornée.

De plus, par construction, la longueur de $[a_n, b_n]$ est $\dfrac{b-a}{2^n}$.

Les segments $[a_n, b_n]$ ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes.

Notons x_0 leur limite commune.

Comme f est continue en x_0, on a (avec $\varepsilon = 1$) :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I : (|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 1)$$

C'est-à-dire : $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I : (|x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1)$

Donc f est bornée sur $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.

Comme les segments $[a_n, b_n]$ ont des longueurs qui tendent vers 0, on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}^* : (n \geqslant N \Rightarrow b_n - a_n < \varepsilon)$$

Donc, pour un certain N, les segments $[a_n ; b_n]$, $n \geqslant N$, sont contenus dans $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.

Or, f n'est pas bornée sur $[a_n, b_n]$ d'où une contradiction.

Donc f est bornée sur I.

<u>2. Montrons : f atteint ses bornes</u>

On vient de voir que f est bornée sur I. Notons $M = \sup_I f$ et $m = \inf_I f$.

Montrons qu'il existe x_0 dans I tel que $f(x_0) = M$.

Comme M est la borne supérieure de f sur I :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in I : M - \varepsilon < f(x) \leqslant M$$

En particulier, avec $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$: $\exists x_n \in I : M - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M$

La suite $(f(x_n))$ converge donc vers M.

En outre, la suite (x_n) est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut donc en extraire une sous suite qui converge vers un certain réel x_0. Notons $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une application strictement croissante telle que $\left(x_{\sigma(n)}\right)$ converge vers x_0.

La fonction f étant continue en x_0, on a : $M = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\sigma(n)}\right) = f(x_0)$.

Donc f atteint son maximum.

On démontre, de même, que f atteint son minimum.

<u>4.2. Théorème</u> *Théorème spécial à certaines séries dites alternées*

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ une série vérifiant les conditions suivantes :

i) (u_n) est à signes alternés : $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n|)$ ou $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n+1} |u_n|)$

ii) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

iii) la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Alors dans ces conditions :

la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente et son reste $R_n = \sum\limits_{k\geqslant n+1} u_k$ vérifie : $\operatorname{sgn} R_n = \operatorname{sgn} u_{n+1}$ et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

<u>Démonstration</u> :

Posons :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

On suppose que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n |u_n|$$

(Le cas $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$ est analogue)

Considérons les deux suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$a_n = S_{2n+1} \text{ et } b_n = S_{2n}$$

- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}|$$

Et comme la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \geqslant 0$$

Donc
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n \geqslant 0$$

La suite (a_n) est croissante.

- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - b_n = S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}|$$

Et comme la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leqslant 0$$

Donc
$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - b_n \leqslant 0$$

La suite (b_n) est décroissante.

- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n - a_n = S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes. Notons S leur limite commune. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leqslant S_{2n+3} \leqslant S \leqslant S_{2n+2} \leqslant S_{2n}$$

De l'encadrement $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$, on déduit :

$$u_{2n+1} \leqslant S - S_{2n} \leqslant 0$$

De l'encadrement $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n+2}$, on déduit :

$$0 \leqslant S - S_{2n+1} \leqslant u_{2n+2}$$

On a donc :

$$(\ast)\quad \begin{cases} u_{2n+1} \leqslant R_{2n} \leqslant 0 \\ 0 \leqslant R_{2n+1} \leqslant u_{2n+2} \end{cases}$$

Ceci prouve déjà :

$$\mathrm{sgn}(R_{2n}) = \mathrm{sgn}(u_{2n+1}) = \text{négatif}$$

$$\mathrm{sgn}(R_{2n+1}) = \mathrm{sgn}(u_{2n+2}) = \text{positif}$$

On peut donc affirmer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{sgn}(R_n) = \mathrm{sgn}(u_{n+1})$$

De plus, en passant aux valeurs absolues dans $(\ast)$, il vient :

$$\begin{cases} 0 \leqslant |\ R_{2n}\ | \leqslant |\ u_{2n+1}\ | \\ 0 \leqslant |\ R_{2n+1}\ | \leqslant |\ u_{2n+2}\ | \end{cases}$$

On peut donc affirmer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n| \leqslant |u_{n+1}|$$