Leçon 202 : Etude de suites numériques définies par différents types de récurrence

Soit $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe
et soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I) Suites récurrentes d'ordre 1

1)définition et propriétés

Dans cette partie, on considèrera uniquement des suites réelles.

Définition 1. *Soit f une fonction réelle définie sur une partie D de $\mathbb{R}$*
On considère un intervalle $I \subset D$ stable par f et a $\in$I
On construit alors la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_n + 1 = f(u_n) \end{cases} \quad (1)$$

Une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est appelée une suite récurrente (d'ordre 1)

Propriété 1. *Si f est croissante sur I, alors la suite (u_n) est monotone et :*
- *croissante si $f(u_0) \geqslant u_0$*
- *décroissante si $f(u_0) \leqslant u_0$*

Propriété 2. *Si f est décroissante, les suites extraites (u_{2n})et(u_{2n+1}) sont monotones.*

Propriété 3. *Si I est borné et si f est croissante alors $\forall u_0 \in I$, la suite (u_n) est convergente.*

Propriété 4. *Si I est fermé, f est continue sur I et (u_n) est convergente vers l alors l vérifie $f(l)=l$*

2) cas particuliers

1. suites arithmétiques
   Une suite (u_n) est arithmétique lorsqu'il existe b $\in \mathbb{C}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + b$. b est appelée la raison et (u_n) converge ssi b=0.
2. suites géométriques
   Une suite (u_n) est géométrique lorsqu'il existe a $\in \mathbb{C}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n$. a est appelée la raison et (u_n) converge ssi $|a|<1$ ou $a=1$.
3. suites arithmético-géométriques
   Une suite (u_n) est arithmético-géométrique lorsqu'il existe (a ;b) $\in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$.
   Si a = 1 ou b = 0, c'est une suite arithmétique ou une suite géométrique.
   Si a $\neq$ 1, la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \dfrac{u_0}{1-a}$ est géométrique de raison a.
   Exemple : étudier les suites (u_n) telles que $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$
4. suites homographiques
   Une suite (u_n) est homographique lorsqu'il existe (a ;b ;c ;d) $\in \mathbb{R}^4$ tel que $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$ et tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$
   On étudie l'équation $x = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (1) :
   - si l'équation (1) a pour solution une valeur de la suite alors la suite (u_n) est constante.
   - si l'équation (1) a 2 racines distinctes α et β alors la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ est géométrique
   - si l'équation (1) a une racine double α alors la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n-\alpha}$ est arithmétique

   Exemple : étudier les suites (u_n) telles que $u_{n+1} = \dfrac{4u_n+2}{u_n+5}$
5. suites imbriquées
   Si la relation entre les suites est linéaire, on les étudie à l'aide de l'algèbre linéaire de manière matricielle comme on le verra au II).
   Exemple : étudier les suites (u_n) et (v_n) telles que : $u_0>0$ et $v_0>0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n+2v_n)$ et $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2u_n+v_n)$
   Dans le cas d'une relation non linéaire, il n'y a pas de méthode générale.
   Exemple : étudier les suites (u_n) et (v_n) telles que : $0<u_0<v_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$

II)Suites récurrentes d'ordre p

Définition 2. *Soit $h \in \mathbb{N}^*$. une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite récurrente d'ordre h si on peut écrire : $\forall n \geqslant h, u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_{n-h})$ où f est une application de $\mathbb{K}^h$ dans $\mathbb{K}$*

1)cas linéaire

On exprime le vecteur $(u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_{n-h+1})$ en fonction du vecteur $(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_{n-h})$ à l'aide d'une matrice A . Il reste à calculer A^n

Exemple 1 : étudier la suite (u_n) telle que : $u_0 = 1, u_1 = 9$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$

Exemple 2 : étudier la suite (u_n) telle que : $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 7u_{n+2} - 16u_{n+1} + 12u_n$

Exemple 3 : suite de Fibbonacci

2)cas non linéaire

Il n'y a pas de méthode générale. Il faut essayer de se ramener au cas linéaire.

Exemple 1 : intégrales de Wallis définies par I_0, I_1 et par $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

Exemple 2 : expliciter u_n en fonction de n si (u_n) est telle que : $u_0>0, u_1>0, \lambda>0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \lambda\sqrt{u_{n+1}u_n}$

Sources : Gourdon , Précis , Méthodix