ETUDE DU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE SUITES ; RAPIDITÉ DE CONVERGENCE

Remarques générales

• Programme : “Etude du comportement asymptotique de suites. Approximation d’un nombre réel ou complexe au moyen de suites : rapidité de convergence et performance d’un algorithme. Accélération de convergence : méthode de Richardson-Romberg.”

• Le comportement asymptotique et la rapidité de convergence d’une suite relèvent de l’analyse théorique. Le calcul numérique effectif de la limite ne fait pas partie a priori du sujet ; il convient toutefois d’évoquer brièvement les problèmes liés au calcul approché, en distinguant vitesse de convergence et performance.

• On a choisi dans le plan ci-dessous de centrer les exemples sur quelques nombres importants de l’analyse : racines carrées, e, π, constante d’Euler. Il y a d’autres situations exploitables : par exemple, les méthodes de résolution approchée des équations fournissent des convergences des divers types.

Plan

1. Etude de suites convergentes

Soit (u_n) une suite convergeant vers a. Si (v_n) converge aussi vers a, on dit que (v_n) c<u>onverge plus rapidement</u> que (u_n) lorsque $v_n - a = o(u_n - a)$. <u>Accélérer la convergence</u> de (u_n), c’est construire une telle suite (v_n).

a) Différents types de convergence

La convergence est <u>lente</u> ssi $\left\|\dfrac{u_{n+1}-a}{u_n-a}\right\| \longrightarrow 1$. C’est le cas lorsque $\|u_n - a\| \approx \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$ $\quad(\lambda > 0 \text{ et } \alpha > 0)$.

• <u>Ex 1 : nombre e</u>. La suite $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ converge vers e ; $e - u_n \approx \dfrac{e}{2n}$.

• <u>Ex 2 : constante d’Euler</u>. La suite $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ converge vers la constante d’Euler γ ; $u_n - \gamma \approx \dfrac{1}{2n}$.

On dit que la convergence est <u>géométrique</u> (ou <u>d’ordre 1</u>) ssi $\left\|\dfrac{u_{n+1}-a}{u_n-a}\right\| \longrightarrow k \quad (0 < k < 1)$. C’est le cas lorsque $\|u_n - a\| \approx \lambda\, k^n \quad (\lambda > 0 \text{ et } 0 < k < 1)$.

• <u>Ex 3 : nombre π</u>. On note u_n (resp. v_n) la demi-longueur du polygone régulier à 2^n côtés ($n \geq 2$) inscrit dans le (resp. circonscrit au) cercle trigonométrique. (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent vers π ; $v_n - u_n \approx \dfrac{\pi^3}{2.4^n}$.

On dit que la convergence est <u>rapide</u> ssi $\left\|\dfrac{u_{n+1}-a}{u_n-a}\right\| \longrightarrow 0$. En particulier, on dit qu’elle est <u>d’ordre r</u>, avec r > 1, lorsque $\left\|\dfrac{u_{n+1}-a}{(u_n-a)^r}\right\| \longrightarrow c \quad (c > 0)$. C’est le cas lorsque $\|u_n - a\| \approx \lambda\, k^{(r^n)} \quad (\lambda > 0\,,\ 0 < k < 1 \text{ et } r > 1)$.

• <u>Ex 4 : méthode de Héron</u>. La suite $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{d}{u_n}\right)$ converge vers $\sqrt{d}$; $\left\|\dfrac{u_{n+1}-\sqrt{d}}{(u_n-\sqrt{d})^2}\right\| \longrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{d}}$.

• <u>Ex 5 : nombre e</u>. Les suites $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n.n!}$ sont adjacentes ; $e - u_n \approx \dfrac{1}{n.n!}$; $v_n - e \approx \dfrac{1}{n^3.n!}$.

b) Méthodes d'accélération de convergence

Barycentration

• <u>Ex 6 : nombre π</u>. Avec les notations de l'exemple 3, posons $w_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n$. (w_n) converge vers π plus rapidement que (u_n) et (v_n) : $w_n - \pi \approx \frac{\pi^5}{20.16^n}$.

Développement asymptotique

• <u>Ex 7 : constante d'Euler</u>. En reprenant les notations de l'exemple 2, on a : $u_n - \gamma = \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En posant $v_n = u_n - \frac{1}{2n}$, on obtient une suite qui converge vers γ plus rapidement que (u_n).

Méthode de Richardson et Romberg

Si l'on est assuré de l'existence d'un développement asymptotique $u_n - a = \lambda\, k_1^n + O(k_2^n)$, avec $|k_2| < |k_1| < 1$, où k_1 est connu, mais pas λ, on pose $v_n = \frac{u_{n+1} - k_1 u_n}{1 - k_1}$. On a alors $v_n - a = O(k_2^n)$.

<u>Remarque</u> : si on dispose d'un développement asymptotique du type précédent à p termes, la méthode peut être itérée p fois.

Méthode d'Aitken

Avec les mêmes notations que ci-dessus, si k_1 n'est pas connu, on le remplace par $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}}$ dans la définition de v_n. On obtient $v_n = \frac{u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2}{u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n}$ et on a encore $v_n - a = O(k_2^n)$.

• <u>Ex 8</u> : Appliquer les méthodes de Richardson-Romberg et d'Aitken au calcul de π et de e, pour accélérer la convergence des suites des exemples 1 et 3.

2. Etude de suites divergentes tendant vers l'infini

La rapidité de divergence d'une suite (u_n) tendant vers l'infini se mesure par la rapidité de convergence de la suite $(\frac{1}{u_n})$ vers 0. On peut distinguer ainsi les notions de <u>divergence lente</u>, <u>géométrique</u>, <u>rapide</u>.

• <u>Ex 9</u> : La suite $u_0 > 0$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ diverge lentement vers +∞ ; $u_n \approx \sqrt{2n}$.

• <u>Ex 10</u> : La suite $u_0 > 0$, $u_{n+1} = 2u_n + \sqrt{u_n}$ diverge géométriquement vers +∞; il existe a>0 tel que $u_n \approx a\,2^n$.

• <u>Ex 11</u> : La suite $u_0 > 0$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ diverge rapidement vers +∞ ; il existe a > 0 tel que $u_n \approx \exp(2^n a)$.

<u>Remarque</u> : dans les trois exemples précédents, on peut faire le parallèle avec les processus continus définis par les problèmes de Cauchy correspondants.

Bibliographie

ARNAUDIES et FRAYSSE, *Cours de mathématiques, tome 2 : analyse*, Dunod
OVAERT et VERLEY, *Analyse vol.1*, CEDIC/Fernand Nathan