APPROXIMATIONS D'UNE SOLUTION D'UNE ÉQUATION NUMÉRIQUE

Remarques générales

• Programme : "Méthode de dichotomie. Méthode des approximations successives ; méthodes de Newton, d'interpolation linéaire et d'ajustement linéaire."

• On illustrera chaque méthode par un algorithme et un calcul effectif accompagné d'une évaluation aussi rigoureuse que possible de la précision obtenue. On pourra éventuellement proposer des méthodes d'accélération de convergence (barycentration, Aitken, Steffensen).

Plan

Introduction

On se propose de résoudre numériquement une équation $F(x) = 0$. Le premier travail est de localiser et séparer les racines, c'est-à-dire (par exemple par l'étude des variations de F) de déterminer le nombre de racines et, pour chaque racine α, de trouver un intervalle $[a, b]$ sur lequel α soit l'unique racine de F.
Selon la monotonie et la convexité de F au voisinage de α, il y a en général quatre cas de figure possibles. Pour fixer les idées, nous utiliserons partout les hypothèses et notations suivantes :

Soit $F : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$, suffisamment régulière, avec $F' > 0$, $F'' > 0$, $F(a) < 0$ et $F(b) > 0$. On pose $M_2 = \sup_{[a,b]} |F''|$ et $m_1 = \inf_{[a,b]} |F'|$. On suppose en outre que $F(a) + (b - a) F'(a) \geq 0$, afin que $[a, b]$ soit stable par toute méthode utilisant des cordes ou des tangentes (on peut toujours s'y ramener, quitte à restreindre l'intervalle). L'unique racine de F sur $[a, b]$ est notée α. On cherche à calculer des valeurs approchées de α.

1. Une méthode élémentaire : la dichotomie

2. Utilisation d'une équation à point fixe

a) Le théorème du point fixe

Soit f une application k-contractante de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Alors :
(i) f admet un unique point fixe α ;
(ii) pour tout u_0 de $[a, b]$, la suite définie par u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α ;
(iii) pour tout entier n, $|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$ et $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0|$;
(iv) (dans le cas où f est suffisamment dérivable sur $[a, b]$) si $0 < |f'(\alpha)| < 1$, la convergence est géométrique ; si $f'(\alpha) = \ldots = f^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $f^{(r)}(\alpha) \neq 0$, la convergence est rapide d'ordre r.

Dans la pratique, on cherche donc à transformer l'équation $F(x) = 0$ en une équation équivalente $f(x) = x$, avec $|f'(\alpha)| < 1$, et si possible $f'(\alpha) = 0$. L'idée la plus simple est $F(x) + x = x$. Si $|f'(\alpha)| > 1$, penser à utiliser f^{-1}.

b) Méthode d'interpolation linéaire

On prend $f(x) = x - \dfrac{x-b}{F(x)-F(b)} F(x)$ si $x \in [a, b[$, prolongée par continuité par $f(b) = b - \dfrac{F(b)}{F'(b)}$.

(i) $[a, b]$ est stable par f, α est l'unique point fixe de f sur $[a, b]$ et $0 < f'(\alpha) < 1$.
(ii) Si $u_0 \in [a, \alpha[$, (u_n) converge vers α en croissant ; si $u_0 \in]\alpha, b]$, (u_n) converge vers α en décroissant ; la convergence est géométrique.
(iii) $|f(x) - \alpha| \leq \dfrac{(b-a)M_2}{2m_1} |x - \alpha|$ et $|u_n - \alpha| \leq (b-a)\left(\dfrac{(b-a)M_2}{2m_1}\right)^n$.

c) Méthode de Newton

On prend $f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$.

(i) [a, b] est stable par f, α est l'unique point fixe de f sur [a, b], $f'(\alpha) = 0$ et $f''(\alpha) \neq 0$. (ii) Si $u_0 \in [a, b]$, (u_n) converge vers α en décroissant à partir de u_1; la convergence est rapide d'ordre 2. (iii) $\lvert f(x) - \alpha \rvert \leq \frac{M_2}{2m_1}(x-\alpha)^2$ et $\lvert u_n - \alpha \rvert \leq \frac{2m_1}{M_2}\left(\frac{(b-a)M_2}{2m_1}\right)^{2^n}$.

Remarque : dans les deux méthodes précédentes, pour que (iii) soit exploitable, il faut choisir a et b au départ de sorte que $\frac{(b-a)M_2}{2m_1} < 1$.

3. Une méthode d'un autre type : la fausse position

On définit (u_n) par $u_0 = b$, $u_1 = a$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{u_n - u_{n-1}}{F(u_n) - F(u_{n-1})} F(u_n)$. On suppose que $\frac{(b-a)M_2}{2m_1} < 1$.

(i) (u_n) converge vers α et, pour tout entier n, $\lvert u_n - \alpha \rvert \leq \frac{2m_1}{M_2}\left(\frac{(b-a)M_2}{2m_1}\right)^{F_n}$, où (F_n) est la suite de Fibonacci définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. (ii) La convergence est rapide, d'ordre le nombre d'or $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Remarque : on admettra (ii) dont la démonstration est difficile.

4. Tableau résumé

Outre les méthodes précédentes, on a fait figurer deux autres méthodes d'approximations successives :

- Méthode d'ajustement linéaire : on prend $f(x) = x - \frac{F(x)}{\lambda}$, avec λ à choisir aussi proche que possible de $F'(\alpha)$.
- Méthode d'Euler-Lagrange : on prend $f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} - \frac{F(x)^2 F''(x)}{2F'(x)^3}$. La méthode est d'ordre 3 mais peu pratique car nécessitant des calculs importants : l'erreur de calcul est vite plus grande que l'erreur de méthode !

Méthode	Type de convergence	Ordre
Dichotomie	géométrique de raison $\frac{1}{2}$	1
Interpolation linéaire	géométrique de raison $1 - \frac{(b-a)F'(\alpha)}{F(b)}$	1
Ajustement linéaire de pente λ	géométrique de raison $1 - \frac{F'(\alpha)}{\lambda}$ (aussi proche de 0 que l'on veut à condition de prendre λ assez proche de $F'(\alpha)$)	1
Fausse position	rapide	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Newton	rapide	2
Euler-Lagrange	rapide	3

Bibliographie

OVAERT et VERLEY, *Analyse, volume 1*, CEDIC/Fernand Nathan
THÉODOR, *Initiation à l'analyse numérique*, Masson
DEMAILLY, *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses universitaires de Grenoble