Leçon 206 : Séries à termes réels positifs

I) Propriété fondamentale et applications

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère les sommes partielles définies par $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_1+u_2+u_3+...+u_n$. On appelle série de terme général u_n la suite (S_n) et on note cette série $\sum u_n$.

On dit que cette série converge si (S_n) converge. Sa limite est alors appelée somme de la série et se note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Toute série de terme général extrait du terme général d'une série à termes positifs convergente est convergente, de somme inférieure à la somme de la série initiale.

Toute série déduite d'une série convergente à termes positifs par permutation (éventuellement infinie) des termes est une série convergente de même somme.

Propriété 1 (fondamentale). *Pour qu'une série $\sum u_n$ à termes réels positifs converge, il faut et il suffit que la suite de ses sommes partielles (S_n) soit majorée. Dans ces conditions, on a* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n$

Propriété 2 (comparaison série-intégrale). *Soit f une application de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R}^+$), continue par morceaux, positive et décroissante.*

- *la série de terme général $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$ (pour $n \geqslant a+1$) est convergente.*
- *$\sum f(n)$ et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.*

Application 1 : séries de Riemann

$x \in \mathbb{R}, \sum \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$

Application 2 : constante d'Euler

Il existe une constante γ telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

Application 3 : séries de Bertrand

$(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\sum \frac{1}{n^\alpha ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

II) comparaison de séries et divers critères de convergence

1) comparaison directe

Propriété 3. *Soit deux séries à termes réels positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Alors si $\sum v_n$ converge ,$\sum u_n$ converge, et si $\sum u_n$ diverge ,$\sum u_n$ diverge.*

Propriété 4. *Soit (u_n) et (v_n) 2 suites à termes strictement positifs. Alors si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$ (au moins à partir d'un certain rang), alors si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge et si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.*

Propriété 5. *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ 2 séries à termes positifs.*

- *Si $v_n = O(u_n)$ lorsque $n \to +\infty$ et si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge.*
- *Si $u_n \sim v_n$ lorsque $n \to +\infty$ alors les deux séries sont de même nature. Si les 2 séries convergent, leurs restes sont équivalents. Si les 2 séries divergent, leurs sommes partielles sont équivalentes.*

Ex : formule de Stirling

2) critères de convergence

critère de Riemann

On utilise la comparaison à une série de Riemann

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs.

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $u_n = o(\frac{1}{n^\alpha})$ quand n tend vers$+\infty$ alors $\sum u_n$ est convergente.
- S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$ quand n tend vers$+\infty$ alors $\sum u_n$ est divergente.

Ex : $\sum u_n$ avec $u_n = \sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt{n^2+3}$ avec $a \in \mathbb{R}$

critère de Cauchy

On utilise la comparaison à une série géométrique

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs et soit $L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$

- Si $L < 1$ alors $\sum u_n$ est convergente.
- Si $L > 1$ alors $\sum u_n$ est divergente.

Ex :$\sum u_n$ avec $u_n = (\frac{an+b}{cn+d})^n$ avec (a,b,c,d) $\in \mathbb{R}^4$ et $a > 0, c > 0$

critère de D'Alembert

On utilise la comparaison logarithmique à une série géométrique

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs et soit $L = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$

- Si $L < 1$ alors $\sum u_n$ est convergente.
- Si $L > 1$ alors $\sum u_n$ est divergente.

Ex :$\sum u_n$ avec $u_n = \frac{1}{n!}$ et $\sum v_n$ avec $v_n = \frac{e^n n!}{n^n}$

critère de Raabe-Duhamel

On utilise la comparaison logarithmique à une série de Riemann

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs non nuls à partir d'un certain rang telle qu'il existe un réel β vérifiant $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o(\frac{1}{n})$

- Si $\beta > 1$ alors $\sum u_n$ est convergente.
- Si $\beta < 1$ alors $\sum u_n$ est divergente.

Ex : $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....2n}$