SÉRIES À TERMES RÉELS POSITIFS

Remarques générales

• “Les sujets réputés classiques (algèbre linéaire, séries à termes positifs, …) sont beaucoup plus délicats à traiter qu’il n’y paraît et ont trop souvent donné lieu à des prestations très pauvres, faute d’une réflexion suffisante.” (Rapport du jury 1991)

• Dans cette leçon trop classique, il faut absolument se distinguer en mettant en évidence de manière très nette l’enchaînement des idées et en illustrant chaque résultat par des exemples et contre-exemples substantiels.

Plan

1. <u>Séries à termes positifs</u>

a) Définitions et notation

<u>Série</u> $\sum u_n$ de <u>terme général</u> (u_n), <u>somme partielle</u> $S_n = \sum_{k\leq n} u_k$. Série <u>convergente</u>, <u>somme</u> $S = \sum_{n\geq 0} u_n$, <u>reste</u> $R_n = S - S_n = \sum_{k\geq n+1} u_k$. Série <u>divergente</u>.

La nature d’une série ne change pas si on modifie un nombre fini de termes. Dans la plupart des théorèmes, il suffit donc que les hypothèses soient vérifiées “à partir d’un certain rang”.

Dans cette leçon, on s’intéresse <u>uniquement aux séries à termes réels positifs</u>. Pour une telle série, la suite des sommes partielles est croissante. Elle converge ssi elle est majorée ; sinon, elle diverge vers $+\infty$.

b) Critères généraux de convergence

• *Correspondance suites-séries :* Une série converge vers S ssi la suite de ses sommes partielles converge vers S. Inversement, une suite (u_n) converge vers ℓ ssi la série de ses différences $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge vers $\ell - u_0$.
• *Condition nécessaire de convergence :* Si une série converge, alors son terme général tend vers 0.
• *Critère de Cauchy :* La série $\sum u_n$ converge ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour $p > n \geq N$ on ait $\sum_{k=n+1}^{p} u_k \leq \varepsilon$.
• *Opérations:* Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent vers S et T, alors la série $\sum(au_n + bv_n)$ converge vers $aS + bT$, et la série $\sum\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right)$ converge vers ST *(produit de Cauchy)*.

c) Comparaison à une intégrale

Soit $f : \mathbf{R}^+ \mapsto \mathbf{R}^+$ une application décroissante. Pour tout entier n, on a $\int_0^n f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(t)dt + f(0)$, donc l’intégrale $\int_0^{+\infty} f$ et la série $\sum f(n)$ sont de même nature.

2. <u>Comparaison de deux séries à termes positifs</u>

a) Principes de comparaison

• *Comparaison directe :*
Supposons que $u_n \leq v_n$ pour tout n. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.
• *Comparaison logarithmique :* Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout n. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.
• *Comparaison asymptotique :*
(i) Supposons que $u_n = O(v_n)$. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et on a $\sum_{k\geq n+1} u_k = O\left(\sum_{k\geq n+1} v_k\right)$. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge et on a $\sum_{k\leq n} u_k = O\left(\sum_{k\leq n} v_k\right)$.
(ii) Même énoncé en remplaçant O par o.

(iii) Supposons que $u_n \approx v_n$. Les séries sont de même nature. En cas de convergence, les restes sont équivalents. En cas de divergence, les sommes partielles sont équivalentes.

b) Séries de référence

• *Séries géométriques :* $\sum q^n$ converge ssi $0 \leq q < 1$.
• *Séries de Riemann :* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.
• *Séries de Bertrand :* $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ell n\, n)^\beta}$ converge ssi ($\alpha > 1$) ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

c) Règles de comparaison

• *Règle de Cauchy (comparaison directe à une série géométrique) :* Si la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)$ admet une limite (finie ou infinie) L et si L < 1 (resp. L > 1)), alors la série $\sum u_n$ est convergente (resp. divergente).
• *Règle de Riemann (comparaison directe à une série de Riemann) :* Si la suite $\left(n^\alpha u_n\right)$ admet une limite (finie ou infinie) L et si $L < +\infty$ et $\alpha > 1$ (resp. $L > 0$ et $\alpha \leq 1$), alors la série $\sum u_n$ est convergente (resp. divergente).
• *Règle de D'Alembert (comparaison logarithmique à une série géométrique) :* Si la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet une limite (finie ou infinie) L et si L < 1 (resp. L > 1), alors la série $\sum u_n$ est convergente (resp. divergente).
• *Règle de Raabe-Duhamel (comparaison logarithmique à une série de Riemann) :* Si la suite $\left(n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right)$ admet une limite (finie ou infinie) L et si L > 1 (resp. L < 1), alors la série $\sum u_n$ est convergente (resp. divergente).

Remarque 1 : on peut imaginer aussi une règle de Bertrand (comparaison directe à une série de Bertrand) et une règle de Duhamel-Bertrand (comparaison logarithmique à une série de Bertrand).
Remarque 2 : comparaison des règles de Cauchy et de D'Alembert.

3. Exercices

Exercice 1 : La série des inverses des nombres premiers est divergente.
Exercice 2 : Si σ est une permutation de $\mathbf{N}^*$, la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$ est divergente.
Exercice 3 : Si (u_n) est une suite positive décroissante, montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature *(critère de condensation de Cauchy)*. Appliquer ce critère aux séries usuelles.
Exercice 4 : Etudier les séries de t.g. a) $u_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n)}$; b) $u_n = \frac{n^n}{n!\,a^n}$; c) $u_{2n} = \frac{1}{2^n 3^n}$, $u_{2n+1} = \frac{1}{2^n 3^{n+1}}$.
Exercice 5 : Déterminer a et b tels que pour tout n, $\int_0^\pi (at+bt^2)\cos nt\,dt = \frac{1}{n^2}$. En déduire que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
Exercice 6 : Calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}$ à la précision 10^{-4}. a) Calcul direct en majorant le reste par une intégrale. b) Accélération de convergence en écrivant $\frac{1}{n^2+1} = \frac{a}{n(n+1)} + \frac{b}{n(n+1)(n+2)} + u_n$, avec $u_n = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Bibliographie

LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 2 : analyse*, Dunod
CHEVALLARD, *Théorie des séries, tome 1 : séries numériques*, CEDIC/Fernand Nathan
MONIER, *Analyse tome 2*, Dunod