SÉRIES À TERMES RÉELS POSITIFS

SOMMAIRE

Rappels

Condition nécessaire mais non suffisante de convergence 2

Séries géométriques 2

Série harmonique 2

Série de terme général $\frac{1}{n^2}$ 3

1. Comparaison de séries à termes positifs 3

1.1. Test de comparaison. Exemple : divergence de $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln n}$. 3

1.2. Test de comparaison logarithmique. 4

2. Comparaison séries-intégrales 4

2.1. Critère intégral de Cauchy. Exemple : séries de Bertrand $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ dans le cas $\alpha = 1$. 4

2.2. Conséquence 1 : convergence de la différence entre la série et l'intégrale. Exemple : constante d'Euler 6

2.3. Conséquence 2 : étude des séries de Riemann. Exemple : séries de Bertrand $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ dans le cas $\alpha \neq 1$. 6

3. Critères usuels de convergence 7

3.1. Lemme. Critère de l'équivalent. 7

3.2. Critère de Riemann. 8

3.3. Règle de D'Alembert. 9

3.4. Règle de Cauchy. 10

3.5. Comparaison entre la règle de D'Alembert et la règle de Cauchy. Contre-exemple : $u_n = 2^{(-1)^n - n}$ 11

3.6. Règle de Raabe-Duhamel. Exemple : $u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}}$ 12

Notation : on utilisera le symbole abusif $\sum u_n$ pour désigner la série de terme général u_n et on notera $U_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ la suite des sommes partielles et, en cas de convergence, $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ la suite des restes.

Quelques rappels :

On dit que la série de terme général u_n converge lorsque la suite des sommes partielles U_n converge, c'est-à-dire :

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geqslant N \Rightarrow \left|\sum_{k=n_0}^{n} u_k - \ell\right| \leqslant \varepsilon\right)$$

Ce critère est peu pratique pour prouver une convergence. Un des objectifs de cette leçon est d'en établir d'autres.

Remarquons qu'une condition nécessaire, mais non suffisante, pour qu'une série converge est que son terme général tende vers 0. En effet :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_{n-1} = \ell \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (U_n - U_{n-1}) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Cette condition est évidemment non suffisante.

(Voir, par exemple, la divergence de la série harmonique, ci-dessous)

On rappelle également les résultats sur les séries géométriques et la série harmonique :

Séries géométriques :

La série de terme général q^n est **convergente** si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas : $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Série harmonique :

La série de terme général $\frac{1}{n}$ **diverge** (vers $+\infty$).

Preuve :

- Pour les séries géométriques :

  Si $q = 1$ alors la série géométrique diverge trivialement.

  Si $q \neq 1$, on a $U_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Or, $q^{n+1} \to \begin{cases} +\infty \text{ si } q > 1 \\ 0 \text{ si } |q| < 1 \\ \text{diverge si } q \leq -1 \end{cases}$ d'où le résultat.

  De plus, lorsque $|q| < 1$: $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}}{1-q}$.

- Pour la série harmonique :

$$U_{2n} - U_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant n\,\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

  La suite (U_n) ne peut donc pas être convergente car si l'on avait $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$, cela entraînerait $\lim_{n\to+\infty} U_{2n} = \ell$ et donc $\lim_{n\to+\infty} (U_{2n} - U_n) = 0$ ce qui est impossible puisque $U_{2n} - U_n \geqslant \frac{1}{2}$. (Ou plus simplement, la suite (U_n) ne satisfait pas le critère de Cauchy ...)

  Et comme (U_n) est croissante, on a bien $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. (Attention, ceci est un abus d'écriture)

Une autre démonstration est possible en comparant avec une intégrale :

D'après la décroissance de l'application $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $]0 ; +\infty[$ on a immédiatement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{(Illustrer)}$$

En sommant, pour n allant de 1 à N : $\quad 0 \leqslant \ln(N+1) \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$

D'où la divergence de la série harmonique.

Remarque : dans le cadre des séries à termes u_n positifs, la suite (U_n) est croissante. **Donc la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles (U_n) est majorée**. De plus, dans ce cadre, le seul cas de divergence est la limite infinie.

Donnons, à titre d'exemple une justification de la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$:

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n}.$$

La suite des sommes partielles est majorée, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge vers un réel $\leqslant 2$.

Dans ce qui suit, les résultats sont données pour des suites (u_n) définies en général sur $\mathbb{N}$. Il va de soi que les résultats s'adaptent (sauf mention contraire) au cas où l'indice appartient à $[\![n_0, +\infty [\![$, $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

1. Comparaison de séries à termes positifs

1.1. Test de comparaison

Soient deux séries de termes généraux respectifs u_n et v_n **positifs** tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Alors :

1. Si $\sum v_n$ est convergente, il en est de même de $\sum u_n$.
2. Si $\sum u_n$ est divergente, il en est de même de $\sum v_n$.

Preuve :

On a donc $U_n \leqslant V_n$. Si la suite (V_n) converge, elle est majorée donc la suite (U_n) aussi. Ainsi la suite (U_n) converge d'où 1. De plus, $\sum u_n \leqslant \sum v_n$.

2 est la contraposée de 1.

Remarque : comme précisé plus haut le résultat subsiste si l'on a $u_n \leqslant v_n$, $\forall n \geqslant n_0$. Mais alors on a plus nécessairement $\sum u_n \leqslant \sum v_n$.

Exemples :

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln n}$ divergent, par comparaison avec la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n}$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{e}^{-\sqrt{n}}$ converge puisque pour $n \geqslant N$, on a : $\mathbf{e}^{-\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ et la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge.

Remarque : le théorème ne s'applique pas si les séries sont à termes de signe non constant. Considérer les séries de terme général : $u_n = -\dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

On a : $u_n \leqslant v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

On a : $\sum u_n$ qui diverge (série harmonique, au signe près)

Et pourtant, $\sum v_n$ converge (voir le théorème spécial à certaines séries altérnées)

1.2. Conséquence *Test de* ***comparaison logarithmique***

Soient deux séries de termes généraux respectifs u_n et v_n **strictement positifs** tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Alors :

1. Si $\sum v_n$ est convergente, il en est de même de $\sum u_n$.
2. Si $\sum u_n$ est divergente, il en est de même de $\sum v_n$.

Preuve :

Puisque u_n et v_n sont strictement positifs, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n}$ et par récurrence immédiate : $\dfrac{u_n}{v_n} \leqslant \dfrac{u_0}{v_0}$.

En posant $\lambda = \dfrac{u_0}{v_0}$, il vient $u_n \leqslant \lambda v_n$.

Si la série $\sum v_n$ est convergente, il en va de même de $\lambda \sum v_n$ et 1.1. permet de conclure d'où 1.

2. est la contraposée de 1.

Ce critère de comparaison sera utile dans la démonstration de la règle de d'Alembert et celle de Raabe-Duhamel.

Remarque : ce résultat reste encore valable avec la condition :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n})$$

2. Comparaison séries-intégrales

Rappelons ici que toute fonction monotone sur un intervalle compact $[a, b]$ est Riemann-intégrable.

2.1. Critère intégral de Cauchy

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction définie, positive et décroissante sur $[n_0, +\infty[$.

Alors la série $\sum f(n)$ est convergente si et seulement si f est intégrable sur $[n_0, +\infty[$.

En cas de convergence, on a : $\displaystyle\int_{n_0+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

Preuve :

Puisque f est décroissante sur $[n_0, +\infty]$, on a :

$\forall k \in [\![n_0, +\infty [\![, \forall t \in [k, k+1]$: $\quad f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$

En intégrant sur $[k, k+1]$, il vient : $\quad f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k)$

En sommant pour $k = n_0$ à n : $$\sum_{k=n_0}^{n} f(k+1) \leqslant \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$$

C'est-à-dire : $$\sum_{k=n_0+1}^{n+1} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$$

En notant $U_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$, on a : $$U_{n+1} - f(n_0) \leqslant \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant U_n$$

Supposons f intégrable sur $[n_0, +\infty[$.

Alors, f étant positive : $$\int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

D'où : $$U_{n+1} \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, la suite (U_n) (qui est croissante car f est positive) est majorée donc converge.

Donc la série $\sum f(n)$ est convergente.

Réciproquement, si la suite (U_n) converge, alors elle est majorée par un réel $M \geqslant 0$. Donc :

$$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M$$

Posons $F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. F est croissante (car f positive) et majorée par M donc admet une limite finie en $+\infty$.

Donc $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Enfin, en cas de convergence, en passant à la limite dans les inégalités suivantes :

$$\int_{n_0+1}^{n+2} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n+1} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$$

On obtient : $$\int_{n_0+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Cette dernière inégalité permet, dans certains cas d'expliciter un encadrement du reste dans le cas de séries convergentes.

<u>Exemples</u> :

- $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n}$ diverge puisque $\int_2^a \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\ln(\ln(a)) - \ln(\ln(2))\right] \xrightarrow[a\to+\infty]{} +\infty$.

  Au passage, ceci prouve également que l'on peut avoir $nu_n \to 0$ sans pour autant que la série $\sum u_n$ converge.

- Et plus généralement, les séries de Bertrand $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ dans le cas $\boldsymbol{\alpha = 1}$:

  $\int_2^a \frac{1}{t(\ln t)^{\beta}}\,\mathrm{d}t \underset{u=\ln t}{=} \int_{\ln 2}^{\ln a} \frac{1}{u^{\beta}}\,\mathrm{d}u$, d'où il apparaît que si $\beta > 1$, la série converge et si $\beta \leqslant 1$ elle diverge.

- $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{e}^{-\sqrt{n}}$ converge puisque $\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \underset{t=x^2}{=} \int_0^{+\infty} 2x\mathbf{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \underset{IPP}{=} 2$.

2.2. Conséquence 1

Avec les conditions de 2.1, la suite (v_n) définie par $v_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Preuve :

On a vu ci dessus que $\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$. Et comme f est positive : $\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_1^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$.

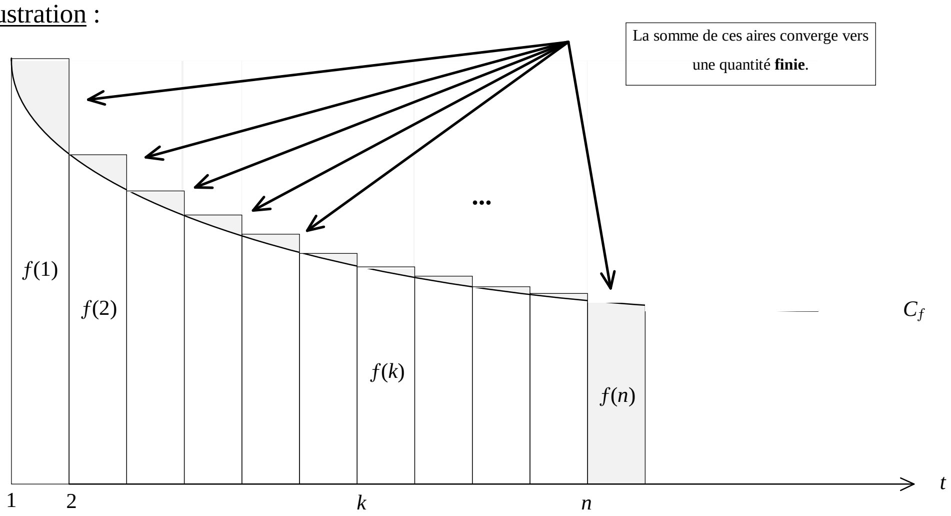
Donc (v_n) est positive.

En outre, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Et comme f est décroissante, $\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(n+1) = u_{n+1}$ donc $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ et, par suite, (v_n) est décroissante.

En conclusion (v_n) converge (dans $\mathbb{R}^+$)

Illustration :



Noter qu'on a nul besoin que f ait une limite nulle en $+\infty$.

Application : *constante d'Euler*

En choisissant $f(t) = \dfrac{1}{t}$, les conditions de II.2 sont vérifiées et on obtient la convergence de la suite :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \quad \text{vers un réel } \gamma \geqslant 0. \text{ (Constante d'Euler} \simeq 0{,}577)$$

2.3. Conséquence 2 *Séries de Riemann*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ $(n \geqslant 1)$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve :

- Si $\alpha < 0$ alors $u_n \longrightarrow +\infty$

  Si $\alpha = 0$ alors $u_n = 1$.

  Dans ces deux cas, la série $\sum u_n$ est trivialement divergente.

- Si $\alpha > 0$ alors posons $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$ (pour $x \geqslant 1$).

  f est dérivable et $f'(x) = -\dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0$, donc f est décroissante sur $[1, +\infty[$.

  Appliquons le critère intégral :

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \ln x \text{ si } \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right) \text{ si } \alpha \neq 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha \leq 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1} \text{ si } \alpha > 1 \end{cases}$$

Bilan : la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple :

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge car $\dfrac{\ln(n)}{n^2} \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{n^2} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$.

3. Critères usuels de convergence

3.1. Lemme

Soient deux séries de termes généraux respectifs u_n et v_n **strictement positifs**.

Si $\quad \exists m, M \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N},\ 0 < m \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant M.$

Alors $\quad$ les deux séries sont de même nature.

En particulier, si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une **limite finie non nulle**, alors les deux séries sont de même nature.

Et plus particulièrement encore : **si $u_n \sim v_n$ alors les deux séries sont de même nature (critère d'équivalence)**

Preuve :

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ m\, v_n \leqslant u_n \leqslant M\, v_n$ (car $v_n > 0$)

D'après 1.1 si $\sum u_n$ converge, alors $m \sum v_n$ aussi donc $\sum v_n$ aussi. Et si $\sum u_n$ diverge, alors $M \sum v_n$ aussi donc $\sum v_n$ aussi. Ainsi, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

En particulier, si $\dfrac{u_n}{v_n} \longrightarrow \ell > 0$ alors : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$: $\left|\dfrac{u_n}{v_n} - \ell\right| < \varepsilon$.

En choisissant $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0$, il vient : $\quad \dfrac{\ell}{2} < \dfrac{u_n}{v_n} < \dfrac{3\ell}{2}$

Donc il existe deux réels m et M strictement positifs tels que : $\forall n \geqslant n_0$, $0 < m \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant M$. Donc, d'après ce qui précède (la nature d'une série ne dépendant pas de ses premiers termes) les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

On obtient le critère de l'équivalent dans le cas où $\ell = 1$.

Exemples :

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+\ln(n)}$ converge car $\displaystyle\frac{n+1}{n^3+\ln(n)}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$.

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2n-1}$ diverge car $\displaystyle\frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}$ et la série harmonique diverge.

Remarque : l'hypothèse de positivité est fondamentale dans ce théorème. En effet, sans cette hypothèse le théorème peut être mis en défaut comme le montre les deux contre-exemples suivants :

- $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ et $v_n=u_n\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\ln(n+1)}\right)$. On a bien $u_n\underset{+\infty}{\sim}v_n$ mais $\sum u_n$ converge (voir théorème des séries altérnées) tandis que $\sum v_n$ diverge puisque somme de $\sum u_n$ qui converge et de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln n}$ qui diverge vers $+\infty$.

- $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}$ et $v_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{(-1)^n}{n}$. On a $\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{(-1)^n n+\sqrt{n}}{(-1)^n n+(-1)^n\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n}+1}\to 1$, donc $u_n\underset{+\infty}{\sim}v_n$.

  En outre, $\sum u_n$ diverge (comme somme d'une série convergente (relevant du TSCSA) et de la série harmonique) et $\sum u_n$ converge (comme somme de deux séries convergentes (relevant du TSCSA))

Cependant le résultat reste vrai si seule la série de terme général v_n est supposée positive.

3.2. Critère de Riemann

Soit une série de terme général u_n **positif** :

1. S'il existe un réel $\alpha>1$ tel que la suite $\left(n^\alpha u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit majorée, alors la série $\sum u_n$ est convergente.
2. S'il existe un réel $\alpha\leqslant 1$ tel que la suite $\left(n^\alpha u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit minorée par $m>0$, alors la série $\sum u_n$ est divergente.
3. En particulier, s'il existe un réel α tel que $n^\alpha u_n$ ait une **limite finie ℓ** alors :

$$(\ell>0 \text{ et } \alpha\leqslant 1)\Rightarrow \text{la série } \sum u_n \text{ est diverge}$$

$$\alpha>1 \ \Rightarrow\ \text{la série } \sum u_n \text{ converge}$$

Preuve :

1. Soit M tel que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n\leqslant\dfrac{M}{n^\alpha}$. Comme $\alpha>1$, la série de terme général $\dfrac{M}{n^\alpha}$ converge donc $\sum u_n$ aussi.
2. On a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant\dfrac{m}{n^\alpha}>0$. Comme $\alpha\leqslant 1$, la série de terme général $\dfrac{m}{n^\alpha}$ diverge donc $\sum u_n$ aussi.
3. Si la suite $\left(n^\alpha u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie ℓ, alors elle est bornée.

   Supposons $\ell>0$ et $\alpha\leqslant 1$. On a :

$$0 < m \leqslant n^{\alpha} u_n$$

C'est-à-dire : $$\frac{m}{n^{\alpha}} \leqslant u_n$$

Donc $\sum u_n$ diverge.

Supposons $\alpha > 1$. On a :

$$0 \leqslant m \leqslant n^{\alpha} u_n \leqslant M$$

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{m}{n^{\alpha}}$$

Donc $\sum u_n$ converge.

Exemples :

- $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{e}^{-n^2}$ converge. En effet, la suite ($n^2\mathbf{e}^{-n^2}$) est bornée puisque $n^2\mathbf{e}^{-n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d'où le résultat d'après 1.
- Séries de Bertrand : $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ où $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}}$ avec $n \geqslant 2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

  Si $\alpha = 1$, voir étude faite au paragraphe 2.

  Si $\alpha > 1$, on pose $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2} > 1$. On a : $n^{\gamma}u_n = n^{\frac{1-\alpha}{2}} (\ln n)^{-\beta} \dfrac{1}{(\ln(2))^{\beta}} \to 0$ donc la série converge.

  Si $\alpha < 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha-1}(\ln(n))^{\beta}} = +\infty$ donc la suite positive (nu_n) est minorée par $m > 0$ à partir d'un certain rang donc la série diverge.

3.3. Règle de d'Alembert

Soit une série de terme général u_n **strictement positif** :

1) S'il existe un réel $q < 1$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$, la série $\sum u_n$ est convergente.

2) S'il existe un réel $q \geqslant 1$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q$, la série $\sum u_n$ est divergente.

3) En particulier, si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ alors :

- Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ est divergente.
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure (sauf si $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ auquel cas la série est trivialement divergente)

Preuve :

1) Posons $v_n = q^n$ ($q < 1$). Ainsi $\sum v_n$ est convergente. Or $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$. On a donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

   D'après 1.2 la série $\sum u_n$ est donc convergente.

2) Idem mais cette fois-ci ($q \geqslant 1$) $\sum v_n$ diverge et on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

   Donc toujours d'après 1.2 la série $\sum u_n$ est divergente.

3) • Si $\ell < 1$ alors soit q tel que $\ell < q < 1$. Pour $n \geqslant n_0$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$, d'où le résultat d'après 1.

   • Si $\ell > 1$ alors soit q tel que $1 < q < \ell$. Pour $n \geqslant n_0$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q$, d'où le résultat d'après 2.

   • Si $\ell = 1$. Considérons la série de Riemann de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = 1$.

   Or, la série donnée converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leqslant 1$. On ne peut donc pas conclure.

Exemples :

- $u_n = \frac{x^n}{n!}$ ($x > 0$). On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1} \longrightarrow 0$ donc $\sum u_n$ converge. Et donc $\frac{x^n}{n!} \longrightarrow 0$!

- $u_n = \dfrac{1}{x^n + \frac{1}{x^n}}$ ($x > 0$). On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{2n+1}+x}{x^{2n+2}+1} \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} < 1 \text{ si } x > 1 \text{ donc } \sum u_n \text{ converge} \\ 1 \text{ si } x = 1 \text{ mais alors } u_n = \frac{1}{2} \text{ donc } \sum u_n \text{ diverge} \\ x < 1 \text{ si } x < 1 \text{ donc } \sum u_n \text{ converge} \end{cases}$

- $u_n = \frac{n!}{n^n}$ ($n > 0$). On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{\mathbf{e}} < 1$ donc $\sum u_n$ converge. Et donc $\frac{n!}{n^n} \longrightarrow 0$!

3.4. Règle de Cauchy

On évitera de parler de "critère de Cauchy" par risque de confusion avec le critère de convergence de Cauchy de la série vue comme une suite...

Soit une série de terme général u_n **strictement positif** :

1) S'il existe un réel $q < 1$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{u_n} \leqslant q$, la $\sum u_n$ est convergente.

2) S'il existe un réel $q \geqslant 1$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{u_n} \geqslant q$, la $\sum u_n$ est divergente (trivialement).

3) En particulier, si a une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ alors :

   - Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ est convergente.
   - Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ est divergente.
   - Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure (sauf si $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 1$ auquel cas la série est trivialement divergente)

Preuve :

Pour 1 (resp. 2), on a $\sqrt[n]{u_n} \leqslant q$ (resp. $\sqrt[n]{u_n} \geqslant q$) qui équivaut à $u_n \leqslant q^n$ (resp. $u_n \geqslant q^n$) d'où le résultat.

Pour 3, on procède comme en 3.3. :

- Si $\ell < 1$ alors soit q tel que $\ell < q < 1$. Pour $n \geqslant n_0$, on a : $\sqrt[n]{u_n} \leqslant q$, d'où le résultat d'après 1.
- Si $\ell > 1$ alors soit q tel que $1 < q < \ell$. Pour $n \geqslant n_0$, on a : $\sqrt[n]{u_n} \geqslant q$, d'où le résultat d'après 2.
- Si $\ell = 1$. Considérons la série de Riemann de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha/n}} = 1$.

  Or, la série donnée converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leqslant 1$. On ne peut donc pas conclure.

Exemples :

- $u_n = \dfrac{n^k}{2^n}$ $(k \in \mathbb{R})$. On a $\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^k}{2} \longrightarrow \dfrac{1}{2} < 1$ donc $\sum u_n$ converge
- $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. On a $\sqrt[n]{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \longrightarrow \dfrac{1}{\mathbf{e}} < 1$ donc $\sum u_n$ converge
- $u_n = \dfrac{n^{\ln(n)}}{\left(\ln(n)\right)^n}$. On a $\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{n^{\frac{\ln(n)}{n}}}{\ln(n)} = \dfrac{\mathbf{e}^{\frac{(\ln(n))^2}{n}}}{\ln(n)} \longrightarrow 0$ donc $\sum u_n$ converge

3.5. Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels **strictement positifs**.

Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite ℓ alors $\sqrt[n]{u_n}$ admet la même limite ℓ.

Moralité : si la règle de d'Alembert conduit au cas $\ell = 1$, il en sera de même pour la règle de Cauchy.

Cependant, la réciproque est fausse, comme le montre le contre-exemple suivant :

Considérer la série de terme général : $u_n = 2^{(-1)^n - n}$

On a : $\sqrt[n]{u_n} = 2^{\frac{(-1)^n}{n} - 1} \to \dfrac{1}{2}$

Mais : si n est pair : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{-1-(n+1)}}{2^{1-n}} = \dfrac{1}{8}$ et si n est impair : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{1-(n+1)}}{2^{-1-n}} = 2$

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ n'admet pas de limite.

Preuve de la proposition 3.5. :

On a donc : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant N \Rightarrow \ell - \varepsilon \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell + \varepsilon\right)$

Supposons $\ell > 0$.

Pour $\varepsilon < \ell$, on a : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \Rightarrow 0 < \ell - \varepsilon \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell + \varepsilon)$

En remarquant que, pour $n > N$: $\frac{u_n}{u_N} = \prod_{p=N}^{n-1} \frac{u_{p+1}}{u_p}$ (produit de $n - N$ facteurs)

Comme $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ (n > N \Rightarrow 0 < (\ell - \varepsilon)^{n-N} \leqslant \frac{u_n}{u_N} \leqslant (\ell + \varepsilon)^{n-N})$$

D'où : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ (n > N \Rightarrow 0 < u_N (\ell - \varepsilon)^{n-N} \leqslant u_n \leqslant u_N (\ell + \varepsilon)^{n-N})$

Par croissance de l'application $t \mapsto t^\alpha$ ($\alpha \geqslant 0$) sur $\mathbb{R}_+^*$, nous avons (avec $\alpha = \frac{1}{n}$) :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ (n > N \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{u_N}\ (\ell - \varepsilon)^{\frac{n-N}{n}} \leqslant \sqrt[n]{u_n} \leqslant \sqrt[n]{u_N}\ (\ell + \varepsilon)^{\frac{n-N}{n}})$$

Or, $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_N}\ (\ell - \varepsilon)^{\frac{n-N}{n}} = \ell - \varepsilon$ et $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_N}\ (\ell + \varepsilon)^{\frac{n-N}{n}} = \ell + \varepsilon$ (car $\lim_{n \to +\infty} \mathbf{e}^{\frac{1}{n} u_N} = 1$)

Donc : $\exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N' \Rightarrow |\sqrt[n]{u_N}\ (\ell - \varepsilon)^{\frac{n-N}{n}} - (\ell - \varepsilon)| \leqslant \varepsilon$ et $|\sqrt[n]{u_N}\ (\ell + \varepsilon)^{\frac{n-N}{n}} - (\ell + \varepsilon)| \leqslant \varepsilon)$

Pour $n > \max(N, N')$, on a alors : $\ell - 2\varepsilon \leqslant \sqrt[n]{u_n} \leqslant \ell + 2\varepsilon$

En faisant tendre ε vers 0, il vient : $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$

Enfin, si $\ell = 0$, on reprend le même raisonnement en remplaçant, dans les encadrements ci-dessus, le membre de gauche par 0.

3.6. Règle de Raabe-Duhamel

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels **strictement positifs** telle que :

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times]1, +\infty[\text{ tels que : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$$

1. Si $\alpha \leqslant 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.
2. Si $\alpha > 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.

Preuve :

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = n^\alpha u_n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right)$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right)$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right) \text{ où } \gamma = \min(2, \beta)$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)$

C'est-à-dire : $\exists C \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \Rightarrow \left|\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)\right| \leqslant \dfrac{C}{n^\gamma})$

Or, $\gamma \in\ ]1, +\infty[$, donc la série de terme général $\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ converge absolument donc converge.

Mais, par télescopage : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \ln\left(\frac{v_{p+1}}{v_p}\right) = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_1)$

Donc la suite $(\ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $\mathbf{e}^\ell$.

Par conséquent : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{K}{n^\alpha}$ (où $K = \mathbf{e}^\ell$)

D'où le résultat cherché. (En utilisant le critère de l'équivalent avec une série de Riemann)

<u>Remarque</u> : si $\alpha \leqslant 0$ alors, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, donc (u_n) croissante et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc la suite (u_n) ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.

<u>3.6. **bis** Règle de Raabe-Duhamel (**variante)**</u>

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels **strictement positifs** telle que :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times]1, +\infty[\text{ tels que : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1. Si $\boldsymbol{\alpha} < \mathbf{1}$ alors la série $\sum u_n$ diverge. (Inégalité stricte et non plus large...)
2. Si $\alpha > 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.

Une démonstration analogue à la précédente serait vouée à l'échec. En effet, on obtiendrait la condition :

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ce qui ne permettrait pas d'affirmer la convergence de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$.

En effet, un terme u_n peut être égal à $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ sans être le terme d'une série convergente. (Prendre $u_n = \dfrac{1}{n \ln n}$)

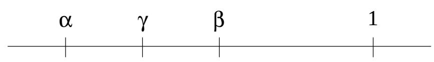
<u>Démonstration</u> :

Posons $\beta = \dfrac{\alpha+1}{2} > 0$ et $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$

On a alors : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

<u>Supposons $\alpha < 1$</u> :

Posons $\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$.



On a donc : $\alpha < \gamma < \beta < 1$

Donc : $$1-\frac{\alpha}{n} > 1-\frac{\gamma}{n} > 1-\frac{\beta}{n}$$

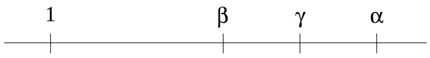
Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, on ait :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1-\frac{\gamma}{n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Or, $\sum v_n$ diverge (car $\beta < 1$). Donc, d'après le critère de comparaison logarithmique, $\sum u_n$ diverge.

<u>Supposons $\alpha > 1$</u> :

Posons $\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$.



On a donc : $$1 < \beta < \gamma < \alpha$$

Donc : $$1-\frac{\beta}{n} > 1-\frac{\gamma}{n} > 1-\frac{\alpha}{n}$$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, on ait :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 1-\frac{\gamma}{n} \geqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Or, $\sum v_n$ converge (car $\beta > 1$). Donc, d'après le critère de comparaison logarithmique, $\sum u_n$ converge.

<u>Exemples</u> :

1) On considère la série de terme général : $u_n = \dfrac{2\times 4\times \ldots \times (2n)}{3\times 5\times \ldots \times (2n+1)}$

   On a : $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+3} \to 1$$

   Le critère de D'Alembert ne permet pas de conclure.

   Mais : $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{2n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{3}{2n}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

   D'après le critère de Raabe-Duhamel avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on déduit que la série diverge.

2) On considère la série de terme général : $u_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}}$

   On a : $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} \to 1$$

   Le critère de D'Alembert ne permet pas de conclure.

   Mais : $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \left(1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right)\left(1-\frac{2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

   D'après le critère de Raabe-Duhamel avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on déduit que la série diverge.