SÉRIES À TERMES RÉELS OU COMPLEXES : CONVERGENCE ABSOLUE, SEMI-CONVERGENCE

Remarques générales

• Les résultats relatifs aux séries à termes réels positifs sont supposés connus.

• Programme résumé : Séries à termes réels ou complexes. Convergence d'une série alternée, majoration du reste. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemples d'emploi d'un développement asymptotique du terme général. Série produit de deux séries absolument convergentes.

• Pour cette leçon très classique, on ne donne que la liste des résultats importants à ne pas oublier. Chacun devra être illustré par des exemples et contre-exemples personnels.

Plan

Introduction

On suppose connus les généralités sur les séries numériques réelles ou complexes (condition nécessaire de convergence, linéarité, critère de Cauchy) et les techniques d'étude des séries à termes positifs (recours à une majoration ou un équivalent du terme général, comparaison à une série de Riemann ou de Bertrand, comparaison à une série géométrique : règles de Cauchy et de D'Alembert, comparaison à une intégrale généralisée).

1. Séries absolument convergentes

a) Définition et intérêt de la convergence absolue

On dit que la série $\sum u_n$ est <u>absolument convergente</u> lorsque la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Toute série absolument convergente est convergente et on a $\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

Grâce à ce résultat, l'étude d'une série absolument convergente se ramène à celle d'une série à termes positifs.

b) Caractérisations de la convergence absolue

• Si x est un nombre réel, on pose $x^+ = \sup(x, 0)$ et $x^- = \sup(-x, 0)$. Soit $\sum u_n = \sum (a_n + ib_n)$ une série à termes réels ou complexes.

La série $\sum u_n$ est absolument convergente ssi les quatre séries à termes positifs $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$, $\sum b_n^+$, $\sum b_n^-$ sont convergentes ; dans ce cas, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^- + i\sum_{n=0}^{\infty} b_n^+ - i\sum_{n=0}^{\infty} b_n^-$.

• On dit que la série $\sum u_n$ est <u>commutativement convergente</u> si, pour toute permutation σ de **N**, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente.

Une série est absolument convergente ssi elle est commutativement convergente ; dans ce cas, sa somme ne change pas lorsqu'on change l'ordre des termes.

Exercice : Lorsqu'une série est convergente sans être absolument convergente, on peut réordonner ses termes de manière à obtenir soit une série divergente, soit une série convergente de somme arbitrairement donnée.

c) Produit de deux séries absolument convergentes

On appelle produit de Cauchy des séries $u = \sum u_n$ et $v = \sum v_n$ la série $u * v = \sum \left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \right)$.

> Si u et v sont absolument convergentes, alors $u * v$ est absolument convergente et
> $$\sum_{n=0}^{\infty} (u * v)_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right)$$

Application : L'exponentielle complexe est un homomorphisme du groupe $(\mathbf{C}, +)$ dans le groupe $(\mathbf{C}^*, \times)$.

2. Séries semi-convergentes

a) Définition

On dit qu'une série est semi-convergente lorsqu'elle est convergente sans être absolument convergente. L'étude d'une série qui n'est pas absolument convergente est délicate ; on va exposer quelques techniques possibles.

b) Séries alternées

On dit qu'une série est alternée lorsque le terme général est de la forme $(-1)^n \varepsilon_n$, où (ε_n) est une suite décroissante de réels positifs convergeant vers 0.

> Toute série alternée $\sum u_n$ est convergente et on a $\sum_{n=0}^{2p+1} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{2p} u_n$ pour tout entier p.

Plus précisément, les sommes partielles d'indice pair (resp. impair) tendent en décroissant (resp. en croissant) vers la somme de la série.

c) Règle d'Abel

> Pour qu'une série de la forme $\sum \varepsilon_n v_n$ soit convergente, il suffit que la suite (ε_n) ait pour limite 0, que la série $\sum |\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}|$ converge et que la suite $(v_0 + v_1 + ... + v_n)$ soit bornée.

Remarque : La deuxième condition est vérifiée dès que la suite (ε_n) est réelle et décroissante. Pour $v_n = (-1)^n$, on retrouve alors le cas des séries alternées.

d) Groupement de termes

La convergence d'une série entraîne celle de la série obtenue par groupement de termes, mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Cette réciproque est vraie dans deux cas usuels :
• chaque groupement est formé de termes de même signe ;
• le terme général de la série tend vers 0 et le nombre de termes dans chaque groupement est borné.

e) Développement asymptotique du terme général

Un développement asymptotique permet parfois d'écrire le terme général d'une série comme somme de deux ou plusieurs termes, correspondant à des séries faciles à étudier.

Bibliographie

RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX, *Cours de mathématiques spéciales, tome 4*, Masson
LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 2 : Analyse*, Dunod