ESPACES VECTORIELS NORMÉS DE DIMENSION FINIE ; NORMES USUELLES, ÉQUIVALENCE DES NORMES

Remarques générales

• La leçon tourne autour de trois résultats qui caractérisent chacun la dimension finie : l'équivalence des normes, la continuité des applications linéaires et la locale compacité.

• Penser à donner en parallèle des exemples et contre-exemples en dimension infinie.

Plan

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie sur **K** = **R** ou **C**. On suppose connues les généralités sur les e.v.n. (notamment la caractérisation des applications linéaires continues), ainsi que les propriétés topologiques de $\mathbf{K}^n$ (en particulier la complétude et le fait que les compacts sont les fermés bornés).

1. <u>Normes en dimension finie</u>

a) Etude des normes usuelles

Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un vecteur quelconque de E.

Les relations suivantes définissent des normes sur E :

• $\boxed{\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}}$ (pour $p \geq 1$) • $\boxed{\|x\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{1\leq i\leq n} |x_i|}$ $\left(= \lim_{p\to\infty} \|x\|_p\right)$

Si $1 \leq p < q < \infty$, on a les inégalités $\|x\|_\infty \leq \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty$.

Exercice 1 (caractérisation des normes euclidiennes) : Si **K** = **R**, une norme est associée à un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right]$.

Exercice 2 (autres exemples) : Dans $\mathbf{R}^2$, $N_1(x) = \operatorname*{Sup}_{t\in[0,1]} |x_1 + t\,x_2|$ et $N_2(x) = \int_0^1 |x_1 + t\,x_2|\,dt$ définissent des normes. Les comparer.

b) Equivalence des normes

• On dit que deux normes N_1 et N_2 sont <u>équivalentes</u> si elles définissent la même topologie. C'est le cas ssi il existe a > 0 et b > 0 tels que $aN_1 \leq N_2 \leq bN_1$.

• *Théorème :* En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

• Il en résulte que la topologie de E est canonique, indépendante du choix d'une base, et que E est isomorphe à $\mathbf{K}^n$. Par suite, E est complet et les compacts de E sont les fermés bornés.

Exercice 3 (cas d'un corps non complet) : Dans $\mathbf{Q}[\sqrt{2}\,]$, **Q**-espace vectoriel de dimension 2, les normes $N_1(a + b\sqrt{2}) = |\,a + b\sqrt{2}\,|$ et $N_2(a + b\sqrt{2}) = |a| + |b|$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 4 (contre-exemple en dimension infinie) : Dans l'espace vectoriel des suites sommables à termes réels ou complexes, les normes $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

2. Applications linéaires en dimension finie

a) Continuité

Théorème : Toute application linéaire d'un e.v.n. E de dimension finie dans un e.v.n. F quelconque est continue.

Exercice 5 (contre-exemple en dimension infinie) : L'application $f \mapsto f'$, de $C^1([0, 1], \mathbf{K})$ dans $C^0([0, 1], \mathbf{K})$, munis de la norme $\| \,.\, \|_\infty$, n'est pas continue.

Conséquences :

• En dimension finie, le dual topologique coïncide avec le dual algébrique.

• L(E, F) est à son tour un e.v.n. pour $\boxed{\|f\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}}$. Cette norme, notée parfois $||| \,.\, |||$, est la norme d'opérateur associée aux normes choisies dans E et dans F.

• Si de plus E = F, L(E) est, pour cette norme, une algèbre normée.

b) Normes d'opérateurs associées aux normes usuelles

Soit $A = (a_{ij})$ la matrice associée à un élément f de L(E) dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Les normes d'opérateur associées aux normes $\| \,.\, \|_\infty$, $\| \,.\, \|_1$ et $\| \,.\, \|_2$ sont définies par les relations :

• $\boxed{\|f\|_\infty = \sup_{1 \le i \le n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)}$ • $\boxed{\|f\|_1 = \sup_{1 \le j \le n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)}$ • $\boxed{\|f\|_2 = \sqrt{\sup_{1 \le i \le n} \lambda_i}}$

où les λ_i sont les valeurs propres (réelles et positives) de la matrice (symétrique réelle) ${}^t\overline{A}A$.

3. Caractérisation de la dimension finie

Théorème de Riesz : Un espace vectoriel normé est de dimension finie ssi sa boule unité fermée est compacte.

Il est équivalent de dire que E est localement compact, ou qu'il existe dans E un compact d'intérieur non vide.

Exercice 6 : Démontrer directement que dans $C([0, 1], \mathbf{K})$ muni de la norme $\| \,.\, \|_\infty$, la boule unité fermée n'est pas compacte.

Bibliographie

LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 2 : analyse*, Dunod
RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX, *Cours de mathématiques spéciales, tome 3*, Masson
CHOQUET, *Topologie*, Masson
TISSERON, *Topologie, Espaces fonctionnels*, Hermann