Leçon 211 : Parties compactes de $\mathbb{R}^n$ - Fonctions continues sur une telle partie - Exemples

I) Parties compactes de $\mathbb{R}^n$

Proposition 1. *Soit E une partie de $\mathbb{R}^n$*
Les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) Toute partie infinie de E admet un point d'accumulation dans E
(ii) De toute suite de points de E, on peut extraire une sous-suite convergente dans E
(iii) E est une partie fermée bornée

Définition 1. *On dit que E est compact lorsque E vérifie une de ces propriétés.*

exemple 1 :
le triadique de Cantor est un compact de [0,1]

exemple 2 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de $\mathbb{R}^n$ et l sa limite.
Alors $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

exemple 3 :
La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est compacte

II) Fonctions continues sur un compact

Propriété 1. *L'image de tout compact de $\mathbb{R}^n$ par une fonction continue est un compact de $\mathbb{R}^n$*

Théorème 1 (theorème de Weierstrass). *Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$ Soit $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

exemple 4 : application à la géométrie
– point de Torricelli

– Soit $\mathcal{C}$ un cercle de $\mathbb{R}^2$
Il existe un triangle d'aire maximum inscrit dans $\mathcal{C}$

exemple 5 : distance atteinte
Soit F une partie non vide fermée de $\mathbb{R}^n$.
$\forall y \in \mathbb{R}^n, \exists x \in F$ tel que $\|x - y\| = d(y, F)$

Application 1 :
Dans $\mathbb{R}^n$, les normes sont équivalentes.

Application 2 : Théorème d'Alembert-Gauss
Soit P un polynôme complexe non-constant.
P admet au moins une racine complexe.

Application 3 : Théorème de Rolle dans $\mathbb{R}$

exemple 6 :
On fixe $n \geqslant 1$
Soit $f \in C^0([0,1]; \mathbb{R})$
Il existe un polynôme P de degré inférieur à n tel que $\|f - P\|_\infty$ soit la borne inférieure de $\{\|f - Q\|_\infty ; Q \in \mathbb{R}_n[X]\}$

Théorème 2 (théorème de Heine). *Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$ Soit $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue.*

exemple 7 :
Une fonction continue de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions affines par morceaux.