PARTIES COMPACTES DE R ET FONCTIONS CONTINUES

Remarques générales

Il faut éviter de se lancer dans une théorie générale des espaces topologiques compacts, dont l'étude de **R** ne serait qu'un simple corollaire. Heureusement, même en se limitant strictement à **R** et aux fonctions de **R** dans **R,** il y a assez de matière. Il peut toutefois être intéressant d'énoncer le théorème de Weierstrass dans le cas d'une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans **R**, afin de pouvoir présenter deux résultats fondamentaux du programme : le théorème de D'Alembert-Gauss et l'équivalence des normes en dimension finie.

Plan

1. Parties compactes de R

Soit E une partie de **R**. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) De tout recouvrement ouvert de E, on peut extraire un sous-recouvrement fini (propriété de Borel-Lebesgue).
(ii) Toute partie infinie de E admet un point d'accumulation dans E (propriété de Bolzano-Weierstrass).
(iii) De toute suite de points de E, on peut extraire une suite qui converge vers un point de E (propriété de compacité séquentielle).
(iv) E est une partie fermée et bornée.

On dit que E est compacte lorsque E vérifie l'une de ces propriétés.

Exercice 1 : Soit (x_n) une suite réelle convergente, de limite x. L'ensemble $\{x_n, n \in \mathbf{N}\} \cup \{x\}$ est une partie compacte de **R**.

Exercice 2 : Ensemble triadique de Cantor. L'ensemble des réels de la forme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n}$, où (a_n) est une suite d'éléments de $\{0, 2\}$, est une partie compacte de **R**, d'intérieur vide, sans points isolés, de mesure nulle et équipotente à **R**.

Exercice 3 : Généralisation du théorème des segments emboîtés. Soit (A_n) une suite décroissante de compacts non vides de **R**. Alors $\bigcap_{n\in N} A_n$ est non vide. Si de plus le diamètre de A_n tend vers 0, $\bigcap_{n\in N} A_n$ est réduit à un point.

Exercice 4 : Un théorème de point fixe. Soit f une application d'un segment [a, b] dans lui-même, vérifiant $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour tout couple de points distincts. Alors f admet un unique point fixe α et, pour tout $c \in [a, b]$, la suite définie par $u_0 = c$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α.

Généralisation : Dans $\mathbf{R}^n$, les propriétés (i) à (iv) sont encore équivalentes, ce qui permet de définir les parties compactes de la même façon que dans **R.**

2. Fonctions numériques continues sur un compact

a) Théorème de Weierstrass

Soient E une partie compacte de $\mathbf{R}^n$ et f une application continue de E dans **R**. Alors f(E) est un compact de **R**. En particulier, f est bornée et atteint sur E sa borne inférieure et sa borne supérieure.

Application 1 : Equivalence des normes en dimension finie. Sur $\mathbf{R}^n$, toutes les normes sont équivalentes et définissent la même topologie.

Application 2 : Théorème de D'Alembert-Gauss. Tout polynôme non constant de **C**[X] admet au moins une racine.

Application 3 : Meilleure approximation sur un fermé. Soient A une partie fermée non vide de $\mathbf{R}^n$ et x un point de $\mathbf{R}^n$. Il existe $y \in A$ tel que $d(x, y) = d(x, A)$.

Application 4 : Divers problèmes d'optimisation. Par exemple, trouver les disques d'aire maximale inclus dans un triangle ABC.

Application 5 : Théorème de Rolle. Soit f une fonction numérique continue sur [a, b], dérivable sur]a, b[et telle que f(a) = f(b). Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

b) Théorème de Heine

Une fonction numérique continue sur une partie compacte de **R** est uniformément continue.

Application 1 : Approximation par des fonctions en escalier. Si f est une fonction continue sur un segment [a, b] à valeurs dans **R**, alors il existe une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur [a, b].

Application 2 : Approximation par des fonctions continues affines par morceaux. Si f est une fonction continue sur un segment [a, b] à valeurs dans **R**, alors il existe une suite de fonctions continues affines par morceaux convergeant uniformément vers f sur [a, b].

Application 3 : Théorème de Bernstein. Si f est une fonction continue sur [0, 1] à valeurs dans **R**, alors la suite de fonctions polynômes $(B_n f)$ définie par

$$B_n f(x) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f\left(\frac{p}{n}\right) x^p (1-x)^{n-p}$$

converge uniformément vers f sur [0, 1].

Bibliographie

TISSERON, *Topologie, espaces fonctionnels*, Hermann
LEHNING, *Topologie*, Masson
LEHNING, *Espaces fonctionnels*, Masson
ARNAUDIES et FRAYSSE, *Cours de mathématiques, tome 2 : analyse*, Dunod
CHOQUET, *Topologie*, Masson