PARTIES CONNEXES DE R ET FONCTIONS CONTINUES

Remarques générales

Le titre semble clair : il n'est pas question de faire une théorie générale des espaces topologiques connexes, mais d'étudier avec soin ce qui se passe dans **R**. C'est l'option choisie ici : après une rapide introduction de la notion de connexité, on se limite à **R** et aux fonctions de **R** dans **R**. Envisager des fonctions dont seul l'ensemble de départ ou l'ensemble d'arrivée est **R** et parler de connexité par arcs n'est pas forcément hors sujet, mais alors il faudrait au moins étudier les parties connexes de $\mathbf{R}^n$... Ce que le jury écrit à propos d'une autre leçon doit être médité : "On se gardera des généralisations hasardeuses ou futiles : mieux vaut traiter convenablement une leçon pour les fonctions à valeurs réelles que de se fourvoyer dans les espaces vectoriels normés."

Plan

1. Généralités sur les espaces connexes

Soit E un espace topologique.
On dit que E est connexe s'il n'admet pas de partition en deux ouverts.
Une partie A de E est dite connexe si, munie de la topologie induite, c'est un espace connexe.
Si x est un élément de E, la réunion des parties connexes de E contenant x est la plus grande partie connexe de E contenant x ; on l'appelle la composante connexe de x. Les composantes connexes (distinctes) sont fermées et forment une partition de E.

Théorème : L'image d'un connexe par une application continue est un connexe.

2. Parties connexes de R

Théorème : Les parties connexes de **R** sont les intervalles.

Application 1 : Tout ouvert de **R** est réunion d'une famille dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Application 2 : Si une fonction f continue sur une partie D de **R** est localement constante sur D (i.e. constante au voisinage de chaque point de D), alors f est constante sur chaque composante connexe de D.
Par exemple, si f est dérivable sur un ouvert U de **R** et si sa dérivée est nulle, alors f est constante sur chacun des intervalles ouverts disjoints qui forment une partition de U. Ceci est utilisé lors de la recherche d'une primitive ou de la résolution d'une équation différentielle : il y a une constante a priori différente sur chaque intervalle.

3. Connexité et continuité dans R

Théorème des valeurs intermédiaires : L'image d'un intervalle de **R** par une fonction numérique continue est un intervalle.

Remarque : f(I) n'est pas en général un intervalle de même nature que I. Le seul cas parfaitement déterminé est celui d'un intervalle compact : l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Application 1 : Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de **R**. S'il existe deux points a et b de I tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine entre a et b. Si on est assuré par ailleurs de l'unicité de la racine, on peut en calculer une valeur approchée par la méthode de dichotomie.

Application 2 : Premier théorème de la moyenne. Si f est continue sur [a, b] et si g est intégrable et positive sur [a, b], alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$.

Exercice 1 : Soit f une application continue de [0, 1] dans lui-même. Montrer que f a au moins un point fixe.

Exercice 2 : Déterminer les sous-algèbres de dimension finie de l'algèbre des applications continues de **R** dans **R** (les lois sont +, . et x).

Exercice 3 : L'anneau des applications continues de [0, 1] dans **R** (les lois sont + et x) est-il principal ?

Exercice 4 : Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle I. Montrer que f'(I) est un intervalle.

Exercice 5 : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I, telle que f(I) soit un intervalle. Montrer que si f admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point, alors f est continue.

Commentaire : L'exercice 4 établit que toute dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, même si elle n'est pas continue : prendre par exemple $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On peut même construire des fonctions qui ne sont continues en aucun point et qui vérifient la propriété des valeurs intermédiaires (voir ARNAUDIÈS et FRAYSSE, tome 1, exercice 11 p.123). Par contre, l'exercice 5 propose une réciproque du théorème dans le cas où f admet une limite à gauche et à droite en tout point. Sur un intervalle compact, les fonctions qui vérifient cette dernière propriété coincident avec les fonctions réglées, les fonctions à variation bornée, ou encore les différences de deux fonctions croissantes.

4. Homéomorphie des intervalles de R

Théorème :

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de **R**, d'extrémités a et b (dans $\overline{\mathbf{R}}$). Alors f est injective ssi f est strictement monotone, et dans ce cas :
i) f(I) est un intervalle de même nature que I (ouvert, fermé, semi-ouvert) d'extrémités $\lim_a f$ et $\lim_b f$;
ii) f est un homéomorphisme de I sur f(I).

Application : Dans l'ensemble des intervalles de **R**, il y a cinq classes d'homéomorphie: celles de ∅, {0}, [0, 1], [0, 1[et]0, 1[.

Bibliographie

ARNAUDIÈS et FRAYSSE, *Cours de mathématiques, tome 2 : analyse*, Dunod
MONIER, *Analyse tome 1 : 800 exercices résolus et 18 sujets d'étude*, Dunod
OVAERT et VERLEY, *Analyse vol.1*, CEDIC/Fernand Nathan