PARTIES CONNEXES DE $\mathbb{R}$. FONCTIONS CONTINUES SUR UNE TELLE PARTIE.

I. Notion de connexité dans un espace topologique

I.1. Définition

Soit (X, T) un espace topologique.

X est dite T-connexe si les seules parties de X à la fois ouvertes et fermées sont $\varnothing$ et X.

Une partie A de X est dite T_A-connexe si elle l'est pour la topologie T_A induite par T.

On convient que $\varnothing$ est connexe.

On peut aussi donner cette définition dans le cadre des espaces métriques.
On dira qu'une partie A d'un espace métrique (X, d) est connexe si les seules parties ouvertes et fermées **de A** sont $\varnothing$ et A.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la topologie (ou la métrique), on dit : "X est connexe" au lieu de "X est T-connexe)

I.2. Exemples :

- (X, T) où T est la topologie grossière ($T = \{\varnothing\ ;\ X\}$) est connexe.
- (X, T) où T est la topologie discrète ($T = \wp(X)$) n'est pas connexe (sauf si X est réduit à un seul élément).
- L'espace métrique $(\mathbb{N}, |\ .\ |)$ n'est pas connexe. (Tout singleton est fermé).
- L'espace métrique $(\mathbb{Q}, |\ .\ |)$ n'est pas connexe car $]-\infty\ ;\sqrt{2}\ [\ \cap\ \mathbb{Q}$ est à la fois ouvert et fermé dans $\mathbb{Q}$. (En effet, $]-\infty\ ;\sqrt{2}\ [$ est ouvert dans $\mathbb{R}$, donc $]-\infty\ ;\sqrt{2}\ [\ \cap\ \mathbb{Q}$ est ouvert dans $\mathbb{Q}$. D'autre part, $]-\infty\ ;\sqrt{2}\ [\ \cap\ \mathbb{Q}$ peut s'écrire comme une intersection infinie de fermés de $\mathbb{Q}$: $\bigcap\limits_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q>\sqrt{2}}}]-\infty ; q] \cap \mathbb{Q}$)
- Dans un e.v.n., les boules (ouvertes ou fermées) sont connexes (car connexes par arcs)
- L'espace métrique $(\mathbb{R}, |\ .\ |)$ est connexe. (Voir ci-dessous)
- L'intersection de deux connexes n'est pas connexe en général.

I.3. Proposition   Caractérisation pratique de la connexité

Soit (X, T) un espace topologique.

- X est T-connexe (ou connexe) si et seulement si :

$$X = O_1 \cup O_2 \text{ où } O_1 \text{ et } O_2 \text{ sont des ouverts disjoints} \Rightarrow O_1 \text{ ou } O_2 \text{ est vide}$$

- Une partie A de X est T_A-connexe (ou connexe) si et seulement si :

$$A = O_1 \cup O_2 \text{ où } O_1 \text{ et } O_2 \text{ sont des ouverts } \textbf{de } \boldsymbol{A} \text{ disjoints} \Rightarrow O_1 \text{ ou } O_2 \text{ est vide}$$

Autrement dit, X est connexe s'il n'existe pas de partition de X en deux ouverts disjoints **non vides**.

Démonstration :

Il est clair que le deuxième point entraîne le premier (en choisissant $A = X$). Démontrons le deuxième point.

Soit $A \in \wp(X)$.

Supposons A connexe non vide (sinon l'implication est évidente)

Supposons : $A = O_1 \cup O_2$ où O_1 et O_2 sont des ouverts **de A** disjoints.

Comme A est connexe, les seules parties ouvertes et fermées de A sont $\varnothing$ et A.

Or, O_1 est un ouvert de A mais également un fermé de A (puisque complémentaire dans A de l'ouvert O_2)

De même, O_2 est ouvert et fermé dans A.

Comme on ne peux pas avoir $O_1 = O_2 = A$ (puisque O_1 et O_2 sont disjoints et que $A \neq \varnothing$), on a nécessairement O_1 ou O_2 vide.

Réciproquement, supposons :

$$A = O_1 \cup O_2 \text{ où } O_1 \text{ et } O_2 \text{ sont des ouverts } \textbf{de } \boldsymbol{A} \text{ disjoints } \Rightarrow O_1 \text{ ou } O_2 \text{ est vide}$$

Soit B une partie de A ouverte et fermée. Alors, $A \setminus B$ est également ouverte et fermée.

Comme $A = B \cup (A \setminus B)$ est une partition, on déduit :

$$B = \varnothing \text{ ou } A \setminus B = \varnothing$$

$$B = \varnothing \text{ ou } B = A$$

Les seules parties de A ouvertes et fermées sont donc $\varnothing$ et A. Donc A est connexe.

I.4. <u>Remarque</u> : on a une caractérisation similaire en remplaçant "ouverts" par "fermés".

I.5. <u>Exercice</u> : une union de connexes dont l'intersection est non vide est connexe :

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes d'un espace topologique X telle que : $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$ (et donc $A_i \neq \varnothing$)

Notons $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Raisonnons par l'absurde.

Si A n'est pas connexe, il existe O_1 et O_2 des ouverts non vides disjoints de A tels que :

$$A = O_1 \cup O_2$$

On remarque que, pour tout $i \in I$:

$$(A_i \cap O_1) \cup (A_i \cap O_2) = A_i \cap (O_1 \cup O_2) = A_i \cap A = A_i \text{ (car } A_i \subset A)$$

Or, $A_i \cap O_1$ et $A_i \cap O_2$ sont des ouverts disjoints dans A_i.

Comme A_i est connexe, on a : $A_i \cap O_1 = \varnothing$ ou $A_i \cap O_2 = \varnothing$.

Si $A_i \cap O_1 = \varnothing$ alors $A_i = A_i \cap O_2$, d'où $A_i \subset O_2$.

De même, si $A_i \cap O_2 = \varnothing$ alors $A_i \subset O_1$.

Soit $I_1 \subset I$ l'ensemble des indices i tels que $A_i \subset O_1$ et $I_2 \subset I$ l'ensemble des indices i tels que $A_i \subset O_2$.

On a alors : $$\bigcap_{i \in I_1} A_i \subset O_1 \text{ et } \bigcap_{i \in I_2} A_i \subset O_2$$

Donc $$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I_1} A_i \cap \bigcap_{i \in I_2} A_i \subset O_1 \cap O_2 = \varnothing$$

D'où une contradiction.

Donc A est connexe.

I.7. <u>Remarques</u> :

- La réunion de deux connexes peut être connexe même s'ils sont disjoints. ($]-\infty ; 0] \cup]0 ; +\infty[$).
- L'exercice ci-dessus peut être étendu de la façon suivante : soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de connexes tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_{n-1} \cap A_n \neq \varnothing$. Alors $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est connexe. (Raisonner par récurrence avec la suite croissante de connexes (B_n) définie par : $B_n = \bigcup_{i=0}^{n} A_i = B_{n-1} \cup A_n$)

I.8. Proposition

Soit (X, T) un espace topologique et A une partie de X.

$$(A \text{ connexe et } A \subset B \subset \overline{A}) \Rightarrow B \text{ connexe}$$

Démonstration :

La situation incite à utiliser des fermés.

Soit $B = F_1 \cup F_2$ où F_1 et F_2 sont des fermés disjoints de B.

On a alors : $$A = (F_1 \cap A) \cup (F_2 \cap A)$$

où $F_1 \cap A$ et $F_2 \cap A$ sont des fermés disjoints de A

Comme A est connexe : $F_1 \cap A = \varnothing$ ou $F_2 \cap A = \varnothing$

Par passage à l'adhérence : $F_1 \cap \overline{A} = \varnothing$ ou $F_2 \cap \overline{A} = \varnothing$

Et comme $B \subset \overline{A}$: $F_1 \cap B = \varnothing$ ou $F_2 \cap B = \varnothing$

Et comme F_1 et F_2 sont inclus dans B : $F_1 = \varnothing$ ou $F_2 = \varnothing$

Donc B est connexe.

En particulier, si A est connexe alors $\overline{A}$ est connexe (prendre $B = \overline{A}$)

II. Connexité et continuité

II.1. Théorème

Soit (X, T) un espace topologique. On a équivalence de :

1. X est T-connexe.
2. Toute application $f : (X, T) \to \{0 ; 1\}$ (muni de la topologie discrète) continue est constante.

Démonstration :

Montrons $1 \Rightarrow 2$:

Supposons X connexe.

Soit $f : X \to \{0 ; 1\}$ une application continue.

Donc l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert. (Et l'image réciproque d'un fermé est un fermé)

Or, les singletons $\{0\}$ et $\{1\}$ sont fermés mais également ouverts (puisque complémentaires d'un fermé)

Donc $f^{-1}(\{0\})$ est ouvert et fermé. De même $f^{-1}(\{1\})$ est ouvert et fermé.

Comme X est connexe, on a nécessairement : $f^{-1}(\{0\}) = \varnothing$ ou X. De même, $f^{-1}(\{1\}) = \varnothing$ ou X.

Or, les ensembles $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$ forment une partition de X.

Donc, l'un est égal à $\varnothing$ et l'autre est égal à X.

Ce qui signifie que f est constante sur X.

Montrons non $1 \Rightarrow$ non 2 :

Supposons X non connexe. Il existe alors des ouverts O_1 et O_2 non vides et disjoints tels que :

$$X = O_1 \cup O_2$$

Montrons que l'on peut construire $f : X \to \{0 ; 1\}$ continue mais non constante.

Il suffit de poser, pour tout $x \in X$: $$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in O_1 \\ 0 \text{ si } x \in O_2 \end{cases}$$

Il est clair que f est non constante (car O_1 et O_2 sont non vides)

Cependant, f est continue. En effet :

$$f^{-1}(\{0\ ;\ 1\}) = X \text{ (ouvert)}$$

$$f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \text{ (ouvert)}$$

$$f^{-1}(\{1\}) = O_1 \text{ (ouvert)}$$

$$f^{-1}(\{0\}) = O_2 \text{ (ouvert)}$$

L'image réciproque de tout ouvert est un ouvert, donc f est bien continue.

On a donc bien : non 1 $\Rightarrow$ non 2. D'où, par contraposition, 2 $\Rightarrow$ 1.

Le théorème est donc démontré.

II.2. Théorème **Image d'un connexe par une application continue**

Soient (X, T) et (Y, T') des espaces topologiques.

Soit $f : (X, T) \to (Y, T')$ une application continue.

Si X est T-connexe alors $f(X)$ est T'-connexe.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin d'un petit lemme :

II.3. Lemme

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications.

Si f est surjective et si $g \circ f$ est constante alors g est constante.

Démonstration du lemme :

Comme $g \circ f$ est constante : $\exists k \in G, \forall x \in E : g \circ f(x) = k$

Pour tout $y \in F$, on peut trouver x dans E tel que $y = f(x)$ (puisque f est surjective).

On a alors : $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = k$

Donc g est constante.

Démonstration du théorème II.2 :

Supposons X connexe.

Soit $g : f(X) \to \{0\ ;\ 1\}$ continue. Alors $g \circ f$ est continue sur X.

Comme A est connexe, on déduit du théorème II.1. : $g \circ f$ constante (sur X)

Or, f définit une surjection de X sur $f(X)$. D'après le lemme, on déduit : g constante (sur $f(X)$)

Toute application continue g de $f(X)$ dans $\{0\ ;\ 1\}$ est donc constante.

Du théorème II.1, on déduit : $f(X)$ connexe.

Démonstration directe du théorème II.2 :

Soit ω une partie non vide de $f(X)$ à la fois ouverte et fermée dans $f(X)$. Montrons que $\omega = f(X)$.

Donc, f étant continue sur X, $f^{-1}(\omega)$ est ouvert et fermé dans X.

Comme X est connexe et $f^{-1}(\omega) \neq \varnothing$ (puisque ω est une partie non vide de $f(X)$) , on a $f^{-1}(\omega) = X$.

On peut donc écrire : $f(X) = f(f^{-1}(\omega)) \subset \omega \subset f(X)$

Ce qui prouve que : $\omega = f(X)$

Les seules parties ouvertes et fermées de $f(X)$ sont $\varnothing$ et $f(X)$ donc $f(X)$ est connexe.

II.4. Remarque : c'est faux pour l'image réciproque. (L'image réciproque du connexe $[1 ; 4]$ par la fonction "carré" est $[-2 ; -1] \cup [1 ; 2]$ qui n'est pas connexe puisque union disjointe de deux fermés (ou ouverts) non vides)

II.5. Exemple : $f : X \to Y$ homéomorphisme. On a : X connexe $\Leftrightarrow$ Y connexe. Ceci prouve que la connexité est une notion topologique (invariante par homéomorphisme)

III. Connexes de ℝ.

III.1. Théorème

Soit I une partie de ℝ. I est connexe $\Leftrightarrow$ I est un intervalle

I est un intervalle (non vide) de ℝ ssi : $\forall (a, b) \in I^2, a \leqslant b, \{t, a \leqslant t \leqslant b\} \subset I$

Le théorème est évident si I est vide ou réduit à un point. On suppose, dans ce qui suit, que ce n'est pas le cas.

Sens direct : démonstration par contraposition

Si I n'est pas un intervalle, alors il existe a et b dans I tels que $a \leqslant b$ et $\{t, a \leqslant t \leqslant b\} \not\subset I$.

Donc il existe c tel que $a \leqslant c \leqslant b$ et $c \notin I$:

On a alors : $$I = (]-\infty ; c[\cap I) \cup (]c ; +\infty[\cap I)$$

où $]-\infty ; c[\cap I$ et $]c ; +\infty[\cap I$ sont des ouverts disjoints non vides de I

Donc I n'est pas connexe.

Sens réciproque : démonstration 1 en utilisant II.1

Soit I un intervalle. Soit $f : I \to \{0 ; 1\}$ continue. Montrons que f est constante.

Soient a et b dans I avec $a < b$. On a : $f^{-1}(f(a))$ est ouvert et fermé dans I.

Soit $B = f^{-1}(f(a)) \cap [a ; b]$. ($B$ est l'ensemble des points de $[a ; b]$ qui ont même image que a)

Évidemment, B est fermé, non vide (contient a) et majoré (par b). Posons $c = \sup B$.

Comme $c \in B$ (puisque B est fermé), on a : $f(c) = f(a)$.

D'autre part, $f^{-1}(f(a))$ étant ouvert et contenant c, il contient une boule ouverte $]c - r ; c + r[$ pour un certain $r > 0$.

Si $c \neq b$, alors il existe x tel que $c < x < b$ et $x \in f^{-1}(f(a))$. Ceci est contraire à la définition de c.

Donc $c = b$. D'où $f(a) = f(b)$ et donc f est constante sur I.

De II.1. on déduit : I est connexe.

Sens réciproque : démonstration 2 en utilisant I.5.

On montre déjà l'implication dans le cas des intervalles **fermés bornés**.

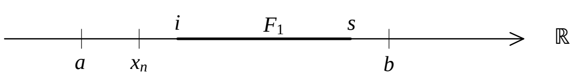
On raisonne par l'absurde.

Soit $I = [a ; b]$.

Si I est non connexe, alors :

$$I = F_1 \cup F_2 \text{ où } F_1 \text{ et } F_2 \text{ sont des fermés disjoints et non vides de } I.$$

Comme I est borné, on peut poser $i = \inf F_1$ et $s = \sup F_1$. (On a donc $i \in F_1$ et $s \in F_1$ car F_1 est fermé)



Si $i > a$, alors en considérant la suite (x_n) définie par $x_n = i - \dfrac{1}{n}$, on a : $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $n \geqslant N \Rightarrow x_n > a$.

$(x_n)_{n \geqslant N}$ est donc une suite d'éléments du fermé F_2 qui converge vers i. Donc $i \in F_2$, ce qui est impossible car F_1 et F_2 sont disjoints.

Donc $i = a$.

On montre, de même que $s = b$.

Mais en raisonnant avec F_2, on montrerait de même que $\inf F_2 = a$ et $\sup F_2 = b$.

Or, ceci est impossible car F_1 et F_2 sont disjoints.

Donc I est connexe.

Ensuite, si I n'est pas un intervalle fermé borné, il suffit de remarquer qu'on peut toujours l'écrire comme une union d'intervalles fermés bornés emboîtés. Par exemple :

$$[a\,;+\infty[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [a\,;\,n]$$

Les intervalles $[a\,;\,n]$ sont connexes, et leur intersection (pour $n \in \mathbb{N}^*$) est non vide.

D'après I.5., on déduit : $[a\,;+\infty[$ connexe. Idem pour les autres types d'intervalles.

En particulier, $\mathbb{R}$ est connexe.

III.2. On a donc une particularisation du théorème II.2 :

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ continue. L'image, par f, d'un intervalle est un intervalle.

III.3. <u>Remarque</u> : on peut se demander si la condition "l'image, par f, de tout connexe est connexe" entraîne la condition "f continue". C'est faux. Considérer l'application f définie, sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} \ \text{ si } \ x \neq 0 \\ \lambda \ \text{ si } \ x = 0 \end{cases} \qquad (\text{où } \lambda \in [-1\,;\,1]).$$

f est non continue en 0, et pourtant, pour tout intervalle I contenant 0, on a $f(I) = [-1\,;\,1]$.

Cependant, si f est monotone ...

III.4. <u>Théorème</u> **Condition suffisante pour qu'une application monotone soit continue.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application monotone sur I telle que $f(I)$ soit un intervalle.

Alors f est continue sur I.

<u>Démonstration</u> :

Supposons f croissante sur I borné. Soit x_0 un point intérieur à I.

Montrons, tout d'abord, que f admet une limite à gauche et une limite à droite telles que :

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

Soit $A = \{f(x) \mid x > x_0 \text{ et } x \in I\}$

Comme x_0 est un point intérieur à I, A est non vide.

Comme f est croissante sur I, A est minorée par $f(x_0)$.

Donc A admet une borne inférieure ℓ qui vérifie $\ell \leqslant f(x_0)$. Montrons que $\ell = f(x^+)$.

Par définition de la borne inférieure :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in A \text{ tel que } \ell \leqslant y < \ell + \varepsilon$$

Soit $x_1 \in I$ tel que $f(x_1) = y$. Ainsi : $\ell \leqslant f(x_1) < \ell + \varepsilon$

Or, f est croissante sur I, donc :

$$\forall x \in I : (x_1 > x > x_0 \Rightarrow \ell \leqslant f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_1) < \ell + \varepsilon)$$

Résumons : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*$ (à savoir $\eta = x_1 - x_0$) tel que : $(x - x_0 < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$

Ce qui signifie que $\ell = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$. On a donc $f(x_0) \leqslant \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

On démontre, de même, que $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0)$.

Les autres cas (f décroissante, I non borné, x_0 sur un bord de I) se démontrent de manière analogue (à la disposition des inégalités près).

Montrons, pour finir que f est continue sur I.

Soit $x_0 \in I$. On sait déjà que : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) < \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, alors il existe un réel y dans $f(I)$, $y \neq f(x_0)$, tel que : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) < y < \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

Or, f étant croissante sur I, pour tout $x < x_0$, x dans I, on a $f(x) \leqslant f(x_0) < y$ et pour tout $x > x_0$, x dans I, on a $f(x) \geqslant f(x_0) > y$. Donc il n'existe pas de x dans I tel que $f(x) = y$. Absurde, car $f(I)$ est un intervalle.

Donc $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, ce qui signifie que f est continue en x_0.

Ce raisonnement étant valable pour tout x_0 intérieur à I, f est donc continue à l'intérieur de I.

Si x_0 est un extrémité de I, on raisonne avec de simples inégalités au lieu d'encadrements.

Donc f est continue sur I.

III.5. Théorème **Valeurs intermédiaires**

Soient (X, d) un espace métrique connexe.

Soit $f : (X, d) \to (\mathbb{R}, |\,.\,|)$ une application continue.

$$\forall (a\,;\,b) \in X^2 \text{ tels que } f(a) < f(b), \forall \lambda \in [f(a)\,;\,f(b)], \exists c \in X \text{ tel que } f(c) = \lambda$$

Démonstration :

Comme X est connexe, $f(X)$ est connexe. C'est donc un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Évidemment, $f(a) \in f(X)$ et $f(b) \in f(X)$.

Comme $f(X)$ est un intervalle : $[f(a)\,;\,f(b)] \subset f(X)$ d'où le théorème.

IV. Applications

IV.1. Théorème **Point fixe**

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$.

Si $f(I) \subset I$, alors f admet (au moins) un point fixe sur I. (Il existe (au moins) un réel x de I tel que $f(x) = x$)

Démonstration :

Considérons la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x) - x$.

Montrons que $0 \in g(I)$:

On a $g(a) = f(a) - a \in g(I)$ et $g(b) = f(b) - b \in g(I)$.

Or, comme $f(I) \subset I$, on a $f(a) \geqslant a$ et $f(b) \leqslant b$, c'est-à-dire $g(a) \leqslant 0$ et $g(b) \geqslant 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $x \in I$ tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x$.

IV.2. Théorème de Darboux

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point)

Soit f une application dérivable sur I.

Alors f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires :

$$\forall (a\ ;\ b) \in I^2,\ f' \text{ prend toute valeur intermédiaire comprise entre } f'(a) \text{ et } f'(b)$$

Note : f' n'est pas, a priori, supposée continue !

Démonstration :

Le théorème est évident si $f'(a) = f'(b)$. Pour la suite, on suppose $f'(a) < f'(b)$.

Considérons les deux fonctions :

$$\varphi : I \to \mathbb{R} \qquad\qquad \phi : I \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ si } x \neq a \\ f'(a) \text{ si } x = a \end{cases} \qquad\qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} \text{ si } x \neq b \\ f'(b) \text{ si } x = b \end{cases}$$

Notons $t = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

φ est continue sur I donc prend toutes les valeurs intermédiaires entre $\varphi(a) = f'(a)$ et $\varphi(b) = t$.

De même, ϕ prend toutes les valeurs intermédiaires entre $\phi(a) = t$ et $\phi(b) = f'(b)$.

Soit λ compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

Distinguons deux cas.

Cas 1 : λ compris entre $f'(a)$ et t.

Donc il existe x dans $[a\ ;\ b]$ tel que $\varphi(x) = \lambda$.

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à f sur $]a\ ;\ x[$, on a : $\exists c \in\ ]a\ ;\ x[\ : f'(c) = \varphi(x) = \lambda$

Cas 2 : λ compris entre t et $f'(b)$.

Donc il existe x dans $[a\ ;\ b]$ tel que $\phi(x) = \lambda$.

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à f sur $]x\ ;\ b[$, on a : $\exists c \in\ ]x\ ;\ b[\ : f'(c) = \phi(x) = \lambda$

D'où le théorème.

IV.3. Corollaire

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point)

Soit f une application dérivable et convexe sur I

Alors f' est continue sur I.

Démonstration :

Comme f est dérivable et convexe sur I, on déduit : f' croissante sur I.

En outre, d'après le théorème de Darboux, f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Et d'après III.4., f' est continue sur I.