THÉORÈME DU POINT FIXE POUR LES CONTRACTIONS D'UNE PARTIE FERMÉE D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ COMPLET ET EXEMPLES D'APPLICATIONS

Remarques générales

• "S'il n'est pas exigé de connaître la démonstration de chacun des résultats cités dans le plan, on doit pouvoir en dire quelque chose ; citons quelques exemples de dialogues : (...) Applications du théorème du point fixe : théorème d'inversion locale, existence et unicité de la solution du problème de Cauchy. —"Pouvez-vous énoncer ces théorèmes ?"—"Non"." (Rapport du jury 1992)

• Les applications en analyse numérique doivent être accompagnées d'algorithmes et de calculs effectifs avec calculatrice programmable.

Plan

1. Théorème du point fixe

a) Énoncé

Soient E un espace vectoriel normé complet (sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$), F une partie fermée de E et f une application contractante de F dans F. Alors :

(i) f admet un unique point fixe a ; (ii) pour tout $x \in F$, $a = \lim\limits_{n\to+\infty} f^n(x)$.

Remarque : Si on appelle k le rapport de Lipschitz de f et si on pose $u_0 = x$ et pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient à partir de la démonstration du théorème deux évaluations possibles de la vitesse de convergence de (u_n) vers a :

$$\|u_n - a\| \le k^n \|u_0 - a\| \qquad \text{et} \qquad \|u_n - a\| \le \frac{k^n}{1-k}\|u_1 - u_0\| .$$

b) Nécessité des hypothèses

• Si E n'est pas complet, f peut être contractante sans avoir de point fixe : $E = F = \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$, espace vectoriel des suites réelles à termes presque tous nuls, muni de la norme $\|u\| = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} |u_n|$, et f : $(u_0, u_1, u_2, \dots) \mapsto \left(1, \frac{u_0}{2}, \frac{u_1}{2}, \dots\right)$.

• Idem si E est complet mais F n'est pas fermée : $E = \mathbf{R}$, F =]0, 1], $f(x) = \frac{x}{2}$.

• La condition $\|f(x) - f(y)\| \le \|x - y\|$ ne suffit pas : $E = F = \mathbf{R}$, $f(x) = x + 1$. La condition $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ ne suffit pas non plus : $E = \mathbf{R}$, F = [0, +∞[, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Par contre, cette dernière condition suffit si F est compact.

c) Premières applications

Voici, pour illustrer le théorème, deux applications (un peu artificielles !) en géométrie. Les "vraies" applications seront développées dans les parties suivantes.
Application 1 : Une similitude de rapport différent de 1 admet un unique point fixe.
Application 2 : Deux droites non coplanaires ont une et seule perpendiculaire commune.

2. Applications en analyse numérique (méthode des approximations successives)

a) Résolution d'une équation numérique

Principe de la méthode :
Soit à résoudre une équation $F(x) = 0$ ayant une unique racine a sur un intervalle I, F étant une fonction "suffisamment dérivable" sur I.
On transforme cette équation en une équation équivalente de la forme $f(x) = x$, avec $|f'(a)| < 1$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que les hypothèses du théorème du point fixe soient vérifiées sur $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.
Pour tout u_0 "assez proche" de a, la suite définie par u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge donc vers a. Si $0 < |f'(a)| < 1$, la convergence est géométrique. Si $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(r-1)}(a) = 0$ et $f^{(r)}(a) \neq 0$, la convergence est rapide, d'ordre r.

Méthodes usuelles de transformation d'une équation en équation à point fixe :
Supposons pour fixer les idées que $I = [c, d]$ et que F soit strictement croissante et convexe sur I.

• *Méthode d'interpolation linéaire :* On prend $f(x) = x - \frac{x - d}{F(x) - F(d)} F(x)$. Géométriquement, on remplace la courbe par des sécantes. La convergence est géométrique.

• *Méthode de Newton :* On prend $f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$. Géométriquement, on remplace la courbe par des tangentes. La convergence est rapide, d'ordre 2.

b) Résolution d'un système linéaire

Principe de la méthode :
Soit à résoudre un système linéaire $AX = B$, où A est une matrice inversible de $M_n(\mathbf{K})$ et B un vecteur de $\mathbf{K}^n$.
On écrit $A = M - N$, avec M inversible et facile à inverser. Le système $AX = B$ équivaut à $X = M^{-1}NX + M^{-1}B$.
Si $\| M^{-1}N\| < 1$, le théorème du point fixe s'applique.

Méthode itératives usuelles : Méthode de Jacobi. Méthode de Gauss-Seidel. Méthode de relaxation.

3. Applications en calcul différentiel

a) Théorème d'inversion locale

Soient E et F deux espaces vectoriels normés réels, U un ouvert de E, a un point de U et f une application de U dans F. Pour $r > 0$, on note $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r.

Lemme : Soit g une application continue de $B(a, r)$ dans E telle que l'application $x \mapsto g(x) - x$ soit k-contractante. Alors il existe un ouvert V de $B(a, r)$ contenant a tel que g soit un homéomorphisme de V sur $B(f(a), (1 - k)r)$. De plus, l'application réciproque est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{1 - k}$.

Théorème : Si f est de classe C^1 sur U et si $f'(a)$ est un isomorphisme de E sur F, alors il existe un ouvert V de U contenant a et un ouvert W de F contenant $f(a)$ tels que f soit un homéomorphisme de V sur W.

b) Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas linéaire)

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, A une application de I dans $M_n(\mathbf{K})$ et B une application de I dans $\mathbf{K}^n$. On considère le système différentiel linéaire $X' = A(t) X + B(t)$, noté (L).

Théorème : Si A et B sont continues sur I, alors pour tout $t_0 \in I$ et tout $X_0 \in \mathbf{K}^n$, le système (L) admet une unique solution X définie sur I telle que $X(t_0) = X_0$.

Bibliographie

LEHNING, *Analyse en dimension finie*, Masson
OVAERT et VERLEY, *Analyse, volume 1*, CEDIC/Fernand Nathan
CIARLET, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson
LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 4*, Dunod