SUITES DE FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE : DIVERS MODES DE CONVERGENCE

Remarques générales

Il faut équilibrer, tant dans les exemples que les applications, les divers modes de convergence et ne pas réduire cette leçon à un exposé sur la convergence simple et la convergence uniforme.

Plan

1. Divers modes de convergence

a) Définitions

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I, et f une fonction définie sur I (f_n et f à valeurs dans **R** ou **C**). On peut définir la convergence de (f_n) vers f en divers sens :

• Convergence simple : $\forall x \in I \quad \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

• Convergence au sens de Cesaro : $\left(\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)$ converge simplement vers f.

• Convergence uniforme : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Si on se restreint à l'ensemble des fonctions bornées sur I, la convergence uniforme est définie par la norme $\|f\|_\infty = \operatorname{Sup}\limits_{I} |f|$.

• Convergence compacte : Pour tout compact K de I, (f_n) converge uniformément vers f sur K.

• Convergence en moyenne d'ordre p ($p \geq 1$) (on suppose I = [a,b] et les f_n et f intégrables au sens de Riemann sur [a,b]) : $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b |f_n - f|^p = 0$. Si on se restreint à l'ensemble des fonctions continues sur [a,b], la convergence en moyenne d'ordre p est définie par la norme $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$.

b) Liens entre les différents modes de convergence

I quelconque	*I = [a,b]*
convergence uniforme	convergence uniforme
$\Downarrow$	$\Downarrow$
convergence compacte	convergence en moyenne d'ordre p
$\Downarrow$	$\Downarrow$
convergence simple	convergence en moyenne d'ordre q, avec q < p
$\Downarrow$	
convergence au sens de Cesaro	

Toutes les autres implications sont fausses (voir contre-exemples ci-dessous). Il y a cependant des cas usuels où la convergence simple entraîne la convergence uniforme :

Theorèmes de Dini : Soit (f_n) convergeant simplement vers f sur [a,b].
(1) Si les f_n et f sont continues et si pour tout x de [a,b], la suite $(f_n(x))$ est croissante, alors (f_n) converge uniformément vers f sur [a,b].
(2) Si f est continue et si les f_n sont croissantes, alors (f_n) converge uniformément vers f sur [a,b].

c) Exemples et contre-exemples

• <u>Ex 1</u> : I = **R**, $f_n(x) = \dfrac{2n\,x^2}{n^2x^4+1}$ (CS sur **R** vers la fonction nulle, CC sur **R***, mais pas CU sur **R,** ni sur **R***).

• <u>Ex 2</u> : I = **R**, $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ (CS sur **R** vers exp, CC - théorème de Dini - mais pas CU sur **R**).

• <u>Ex 3</u> : I = [0, 1], $f_n(x) = x^n$ (CM et CMQ vers la fonction nulle mais pas CU ; CS vers une fonction presque partout égale à la fonction nulle).

• <u>Ex 4</u> : I = [0, 1], $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\ln n}}\dfrac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}}$ (n≥2) (CM vers la fonction nulle, mais pas CMQ).

• <u>Ex 5</u> : I = [0, 1], $f_n(x) = n^2x$ pour $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $f_n(x) = -n^2x + 2n$ pour $x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ et $f_n(x) = 0$ pour $x \in \left[\frac{2}{n}, 1\right]$ (n≥2) (CS vers l'application nulle mais ni CM ni CMQ).

• <u>Ex 6</u> : I = [0, 1] ; si n est pair : $f_n(x) = -nx + 1$ sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ et $f_n(x) = 0$ sur $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$; si n est impair : $f_n(x) = nx - n + 1$ sur $\left[1-\frac{1}{n}, 1\right]$ et $f_n(x) = 0$ sur $\left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$ (n≥1) (CM et CMQ vers la fonction nulle mais pas CS).

2. Exemples d'utilisation des différents modes de convergence

a) Problèmes d'interversion de limites

Si (f_n) converge compactement vers f et si les f_n sont continues, alors f est continue.

Si (f_n) converge simplement vers f, si les f_n sont dérivables et si (f_n') converge compactement vers g, alors f est dérivable et f' = g. Application : exp est dérivable et égale à sa dérivée.

Si (f_n) converge uniformément vers f sur [a, b] et si les f_n sont intégrables, alors f est intégrable et $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b f$.

b) Approximation sur un segment

Si f est continue sur [a, b], il existe une suite (f_n) de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f. Conséquence : f est intégrable sur [a, b].

Si f est continue sur [a, b], il existe une suite (f_n) de fonctions continues affines par morceaux convergeant uniformément vers f. Conséquence : L'ensemble des fonctions continues affines par morceaux est dense dans $C^0([a, b])$ pour la norme uniforme, donc aussi pour la norme de la moyenne d'ordre p.

c) Séries de Fourier

Soit f une fonction périodique continue par morceaux et soit (S_n) la suite des sommes partielles de sa série de Fourier. Alors :
• (S_n) converge vers f en moyenne quadratique *(théorème de Bessel-Parseval).*

• (S_n) converge au sens de Cesaro vers la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ *(théorème de Fejer).*

Bibliographie

LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 2 : analyse*, Dunod
FLORY, *Topologie et analyse, tome 2*, Vuibert
HAUCHECORNE, *Les contre-exemples en mathématiques*, Ellipses