Leçon 216. Séries entières. Rayon de convergence. Propriété de la somme

Par M.Schavsinski

I)rayon de convergence

1)définitions

Définition 1. *On appelle série entière une série de fonctions de terme général $z \mapsto (a_n).z^n$, avec la suite (a_n) une suite de nombres complexes. On la note $\sum_n a_n.z^n$.*

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite des coefficients de la série entière.

On appelle domaine de convergence d'une série entière l'ensemble des z tels que la somme $\sum a_n.z^n$ est bien définie.

Lemme 1 (Abel). *Soit z_0 un nombre complexe tel que la suite $(a_n.{z_0}^n)$ soit bornée.*

Alors pour tout z tel que $|z| \leqslant |z_0|$, la série $\sum a_n.z^n$ est absolument convergente.

Définition 2. *Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n.z^n$ est le sup des réels $r > 0$ tel que $a_n.z^n$ soit bornée. Le rayon de convergence peut éventuellement être infini.*

Théorème 1 (conséquence du lemme d'Abel). *Si la série $\sum a_n.z^n$ est de rayon de convergence R, alors :*

i)pour tout z de module $< R$ la série de terme général $\sum a_n.z^n$ est absolument convergente.

ii)pour tout z de module $> R$ la série de terme général $\sum a_n.z^n$ diverge, et en fait la suite $a_n.z^n$ n'est pas même bornée.

Exemples :

- décomposition de π : $3+z+4z^2+z^3+5z^4+...$ on n'a ni i) ni ii) pour z=1 donc R=1
- $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, on n'a ni i) , ni ii) pour z=1 donc R=1

Théorème 2 (Formule d'Hadamard). *On se donne $\sum a_n.z^n$ une série entière. Soit $L = limsup|a_n|^{1/n}$, alors $R = 1/L$ (avec $1/0 = +\infty$ et $1/+\infty = 0$).*

Théorème 3 (Règle de D'Alembert). *On se donne $\sum a_n.z^n$ une série entière. On suppose que les a_n sont non nuls, au moins à partir d'un certain rang, et on suppose que a_{n+1}/a_n tend vers L. Alors $R = 1/L$.*

On obtient 4 cas :

• $R = \infty$
par exemple pour les a_n : $\dfrac{1}{n!}$,$\dfrac{1}{n^n}$,les polynômes, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n!}}$

• $R = 0$
par exemple $\sum z^{n^2}$ ou $\sum n!z^n$

• $0 < R < \infty$ et CA pour $|z| = R$
par exemple $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$
$\sum z^n/n$ a clairement pour rayon de convergence 1. En 1, il est clair que la série diverge. Pour z de module 1 et différent de 1, alors la somme des z^k entre 0 et n est bornée (ça fait $\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$).

• $0 < R < \infty$ et pas de CA pour $|z| = R$
$\sum z^n$ a clairement pour rayon de convergence 1. Et il est non moins clair que sur tout le cercle de rayon 1 la somme diverge.
$\sum z^n/n^2$ a toujours aussi clairement un rayon de convergence 1, et il est non moins clair que sur tout le cercle de rayon 1 la somme converge.

2)opérations sur les séries entières

- un décalage d'indice ne change pas le rayon de CV ni la CV
- changement de variable
- somme

Définition 3. *Etant donnée deux séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$, on définit la série entière produit par $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$, avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, et la séries entière somme par $\sum_{n\geqslant 0} d_n z^n$ avec $d_n = a_n + b_n$.*

Il est bien évident que le rayon de convergence de la série entière somme de deux séries entières est au moins le min R des deux rayons de convergence, et que la fonction somme est dans le disque $D(0,R)$ la somme des deux fonctions sommes des deux autres séries.

- produit

En appliquant les résultats de la partie [*] on montre facilement que deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z_n$ de rayon de convergence $\geqslant R$ on un produit convergeant sur le disque $D(0,R)$ (R toujours le min des deux rayons de convergence) et que la série produit sur $D(0,R)$ a une somme égale au produit des deux fonctions sommes obtenues pour les deux séries entières.

- dérivation

II)Propriétés de la somme

Théorème 4 (Fondamental). *Si $\sum a_n.z^n$ a pour rayon de convergence R, la série de terme général $\sum a_n.z^n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout compact contenu dans le disque de centre 0 et de rayon R.*

• La somme d'une série entière est continue sur le disque ouvert de convergence

Attention ! Même s'il y a convergence sur un disque FERMÉ on ne peut pas en déduire que la somme est continue sur le disque FERMÉ !

• **Dérivation des séries entières**

Définition 4. *On se donne* $\sum_{n\geqslant 0} a_n.z^n$ *une série entière ; on appelle série dérivée d'ordre* p *la série* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p}.z^n$.

On appelle série dérivée (tout court !) d'une série entière la série dérivée d'ordre 1.

Théorème 5. *Théorème La série dérivée* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p}.z^n$ *de la série* $\sum a_n.z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R *a le même rayon de convergence* R.

Un corollaire immédiat :

Corollaire Si f est une somme de série entière, alors $f^{(n)}(0)$ est égal à $n!.a_n$ avec $f = \sum a_n.z_n$

III)Applications

- Construction de fonctions (par ex e^z)
- Calcul d'intégrales
- développement en SE de fonctions usuelles
- résolution d'équa diff
- résolution d'équation fonctionnelle (ex $f(x) + f(x^2) = x$)