SÉRIES ENTIÈRES. RAYON DE CONVERGENCE. PROPRIÉTÉS DE LA SOMME

Remarques générales

• Le programme envisage les séries entières d'une variable complexe (uniquement en vue de l'exponentielle complexe et ses applications à la géométrie) mais se restreint à la variable réelle dès qu'il s'agit de dérivation et d'intégration. Suivre ce schéma et ne pas se lancer sur le terrain dangereux des fonctions holomorphes.

• Leçon très classique faisant l'objet d'un chapitre dans tous les traités d'analyse. Se distinguer par des exemples et applications substantiels.

Plan

1. Séries entières d'une variable complexe

a) Définitions et notations

• Série entière : série d'applications de la forme $\sum a_n z^n$, où (a_n) est une suite de nombres complexes (les coefficients) et z une variable complexe.
• Rayon de convergence : $R = \sup\left\{r \in \overline{\mathbf{R}} \,/\, (a_n r^n) \text{ bornée}\right\}$.
• Disque de convergence : $D = \{z \in \mathbf{C} \,/\, |z| < R\}$.
• Cercle de convergence : $C = \{z \in \mathbf{C} \,/\, |z| = R\}$

b) Propriétés de convergence *(Théorème d'Abel)*

• La série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour $|z| < R$ et diverge pour $|z| > R$.
• La convergence est normale (donc uniforme) sur tout compact de D.
• Si z_0 est un point de convergence sur C, il y a convergence uniforme sur le rayon $[0, z_0]$.

Exemples : $\sum \frac{z^n}{n!}$, $\sum n!z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$, $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n^2}$.

c) Détermination pratique du rayon de convergence

• *Formule d'Hadamard :* $\boxed{R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}}$

• *Règles de Cauchy et de D'Alembert :*

Si $\left(|a_n|^{1/n}\right)$ admet une limite L dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors R = 1/L.

Si $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ admet une limite L dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors R = 1/L.

Si $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ admet une limite L dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors $\left(|a_n|^{1/n}\right)$ admet aussi pour limite L.

Exemple : $\sum a_n z^n$ avec $a_{2n} = \frac{1}{2^n 3^n}$ et $a_{2n+1} = \frac{1}{2^n 3^{n+1}}$.

2. <u>Propriétés de la somme d'une série entière d'une variable réelle</u>

Tout ce qui précède reste valable. On parle maintenant d'intervalle de convergence]-R, R[et pour un point x de cet intervalle, on note f(x) = $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ la somme de la série entière.

a) Dérivation et intégration

• f est de classe C^∞ sur]-R, R[. Ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme et les séries de dérivées ont même rayon de convergence que la série de départ.   • La primitive de f sur]-R, R[qui s'annule en 0 s'obtient par intégration terme à terme et la série de primitives a même rayon de convergence que la série de départ.

b) Fonctions développables en série entière

• On dit qu'une fonction f est <u>développable en série entière au voisinage de 0</u> s'il existe un réel a > 0 et une série entière $\sum a_n x^n$ tels que pour tout $x \in]-a, a[$, on ait f(x) = $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

• Si f est développable en série entière au voisinage de 0, alors f est de classe C^∞ au voisinage de 0, son développement est unique et c'est la <u>série de Taylor</u> de f, à savoir $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

• La réciproque est fausse. *Exemple :* f(0) = 0 et f(x) = $\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$.

c) Développement en série entière des fonctions usuelles

A partir des développements de exp sur **R** (c'est la définition) et de $(1 + x)^\alpha$ sur]-1, 1[(obtenu à partir de la formule de Taylor avec reste intégral), on peut calculer ceux des fonctions usuelles par opérations algébriques, dérivation et intégration.

3. <u>Applications des séries entières</u>

• Exponentielle complexe, fonctions cosinus et sinus, nombre π, mesure des angles

• Calcul de valeurs approchées d'une fonction

• Calcul d'intégrales par développement en série et intégration terme à terme

• Recherche de solutions particulières d'équations différentielles

Bibliographie

LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 2 : analyse*, Dunod
LEHNING, *Analyse fonctionnelle*, Masson