Leçon 220 : Définition de l'exponentielle complexe et des fonctions trigonométriques, nombre π

Prérequis : séries entières

I) Définition de l'exponentielle complexe

Propriété 1.

La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ *a un rayon de convergence infini.*

Définition 1.

$\forall z \in \mathbb{C}$, *exp(z)*$=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

Théorème 1.
$\forall (z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2$, *exp*$(z_1 + z_2)$=*exp*$(z_1)$*exp*$(z_2)$

Définition 2. e = *exp(1)*

Notation :
Compte tenu de la propriété 3 et de la définition 2, on peut noter exp(z) = e^z

Corollaire 1.

i) $\forall z \in \mathbb{C}$, *on a* $e^z \neq 0$ *et* $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$

ii) $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall z \in \mathbb{C}$, *on a* $(e^z)^n = e^{nz}$

Propriété 2.
$\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

Théorème 2.
i) la fonction exponentielle est sa propre dérivée : exp'(z) = exp(z)

ii) la restriction de la fonction exponentielle à l'axe réel est une fonction positive strictement croissante et $e^x \to \infty$ *quand* $x \to \infty$, $e^x \to 0$ *quand* $x \to -\infty$

Propriété 3.
$\forall z \in \mathbb{C}$, $|\ e^z\ | = e^{Re(z)}$

Corollaire 2.
$\forall z \in \mathbb{C}$, *(* $|\ e^z\ | = 1 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$ *)*

Théorème 3.
$z \longmapsto$ *exp(z) est un morphisme surjectif continu du groupe* $(\mathbb{C},+)$ *sur le groupe* $(\mathbb{C}^*,\times)$.

II) Nombre π

Définition 3.
Il existe un nombre positif π *tel que* $e^{\frac{\pi i}{2}} = i$ *et tel que* e^z*=1 si et seulement si* $\frac{z}{2\pi i}$ *est un entier relatif.*

Théorème 4.
i) la fonction exponentielle est périodique de période $2\pi i$

ii) l'application $t \longmapsto e^{it}$ *est une surjection de l'axe réel sur le cercle unité.*

iii) Pour tout nombre complexe $w \neq 0$, *il existe un nombre complexe z tel que* w=e^z

exemple 1 :
Soit f : $x \mapsto x$ sur $]-\pi;\pi[$ de valeur 0 aux bornes donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

3) convergence simple

Théorème 5 (Th de Dirichlet).
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *une application* 2π*-périodique de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux. Alors, pour tout réel x,* $\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$

Corollaire
Si $f \in D_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier de f converge simplement vers f.

exemple 2 :
Caractérisation des fonctions f 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$ et $\|f\|_2 = \|f'\|_2$

exemple 3 :
Soit f 2π-périodique, impaire et telle que $\forall t \in]0,\pi[, f(t) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = 0$
$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

4) convergence normale

Propriété 4.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *une application continue* 2π*-périodique de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux. Alors, la série de Fourier de f converge normalement vers f.*

exemple 4 :
Soit f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(t) = |cos(t)|$, combien vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$?

Biblio : Gourdon, Rudin, Préçis