SÉRIES DE FOURIER

Remarques générales

• Programme résumé : Coefficients et série de Fourier d'une fonction 2π-périodique continue par morceaux à valeurs complexes. Propriété de meilleure approximation en moyenne quadratique, convergence en moyenne quadratique, formule de Parseval. Théorème de Dirichlet lorsque f est de classe C^1 par morceaux. Exemples d'emploi de séries trigonométriques pour la recherche de solutions d'équations différentielles.

• Plutôt que de rechercher des résultats théoriques plus fins que ceux du programme (par exemple le théorème de Cesaro-Féjer), il vaut mieux se consacrer à des exemples et applications variés.

Plan

1. Définitions et notations

Soient E l'espace vectoriel des applications 2π-périodiques et continues par morceaux de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, et E_0 le sous-espace vectoriel des applications f telles que $\int_0^{2\pi}|f| = 0$. La plupart des notions introduites ci-après pour un élément de E ne dépendent en fait que de sa classe d'équivalence modulo E_0, aussi on identifiera souvent E à l'espace quotient E/E_0.

E est un espace préhilbertien pour le produit scalaire $(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,\overline{g}$ et les applications $e_n : t \mapsto e^{int}$, où $n \in \mathbf{Z}$, constituent une famille orthonormale de E.

On appelle <u>coefficients de Fourier complexes</u> d'une application f de E les "coordonnées" de f suivant cette famille, c'est-à-dire $\boxed{c_n = (f|e_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt}$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on peut définir aussi les <u>coefficients de Fourier réels</u> de f par $\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt}$ et $\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt}$, de sorte que $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ et $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$.

On appelle respectivement <u>polynôme de Fourier d'ordre n</u> de f et <u>série de Fourier</u> de f le polynôme trigonométrique $\boxed{S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k}$ et la série trigonométrique $\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e_k}$.

2. Propriétés des polynômes et de la série de Fourier

a) Propriété de meilleure approximation en moyenne quadratique

$\boxed{S_n \text{ est l'unique polynôme trigonométrique P d'ordre} \le n \text{ qui réalise le minimum de } \| f - P \|.}$

b) Inégalité de Bessel

$\boxed{\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \le \|f\|^2}$. Il en résulte la convergence de la série $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$.

c) Théorème de Dirichlet

Si f est de classe C^1 par morceaux, alors (S_n) converge simplement vers l'application $x \mapsto \frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$

La convergence est uniforme sur tout segment de continuité de f.
Si de plus f est continue sur **R**, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f.

Vitesse de convergence uniforme : Si f est de classe C^p, alors $\|f - S_n\|_\infty = o\left(\frac{\ln n}{n^p}\right)$.

d) Théorème de Parseval

(S_n) converge vers f en moyenne quadratique et $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2$.

3. Exemples et applications

a) Calcul de sommes de séries

En utilisant la fonction 2π-périodique définie sur [-π, π] par $f(t) = t^2$, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

b) Phénomène de Gibbs

Soit f la fonction 2π-périodique définie sur [-π, π] par f(x) = 1 sur]0, π[, f(x) = -1 sur]-π, 0[et f(-π) = f(0) = f(π) = 0. Alors $\lim_{n\to\infty} \|f - S_{2n+1}\|_\infty > 0$.

c) Développement en série de fonctions

En utilisant la fonction 2π-périodique définie par f(t) = cos xt, montrer que pour tout x ∈ **R****Z**, $\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 - n^2}$, la convergence étant uniforme sur tout compact de **R****Z**.

d) Théorèmes de densité

Soit f continue et 2π-périodique. Pour tout ε > 0, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\| f - P \|_\infty < \varepsilon$.

Soit f continue sur [a, b]. Pour tout ε > 0, il existe un polynôme Q tel que $\| f - Q \|_\infty < \varepsilon$. *(Weierstrass)*

e) Résolution d'équations aux dérivées partielles

Etudier le problème des vibrations d'une corde élastique de longueur au repos L et dans un état donné à l'instant t = 0, c'est-à-dire l'équation $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, avec les conditions aux limites y(0, t) = y(L, t) pour tout t ≥ 0 et les conditions initiales y(x, 0) = f(x) et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = g(x)$ pour tout x ∈ [0, L].

Bibliographie

LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 2 : analyse*, Dunod
GRAMAIN, *Intégration*, Hermann
LEHNING, *Analyse fonctionnelle*, Masson
LION, *Une progression simple pour les séries de Fourier*, Revue de Mathématiques Spéciales 85/86 n°3