FONCTIONS CONVEXES D'UNE VARIABLE RÉELLE

Remarques générales

• Programme : Caractérisation des fonctions convexes de classe C^1 par les propriétés suivantes : la partie du plan située au-dessus de la courbe est convexe ; tout arc est sous sa corde ; la dérivée première est croissante ; la courbe est au-dessus de chaque tangente.

• L'exposé de ces résultats est standard et fait l'objet d'un chapitre dans tous les traités. C'est plutôt par un choix judicieux d'exercices et d'applications (exploitant notamment les inégalités de convexité) que l'on pourra introduire une touche personnelle et originale.

Plan

f désigne partout une fonction numérique définie sur un intervalle I de **R**.

1. Notion de fonction convexe

a) Définitions

f est <u>convexe</u> ssi, pour tout $(x, y) \in I^2$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, $f[(1 - \lambda)x + \lambda y] \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$.
f est <u>strictement convexe</u> lorsque les inégalités précédentes sont strictes pour $x \neq y$ et $\lambda \in]0, 1[$.
f est <u>concave</u> (resp. <u>strictement concave</u>) ssi - f est convexe (resp. strictement convexe).

Exercice 1 : Si f est continue et si, pour tout $(x, y) \in I^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$, alors f est convexe.

Exercice 2 : <u>Opérations sur les fonctions convexes</u>.
a) Une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe.
b) Une limite simple de fonctions convexes est convexe.
c) Si f est convexe et si g est convexe croissante, alors g o f est convexe.
d) Si f est une bijection convexe croissante, alors f^{-1} est concave.
e) Application : exp est convexe ; ln est concave; cas de $\exp_a$ et $\log_a$ pour $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

b) Caractérisations

La convexité de f équivaut à chacune des propriétés suivantes :

(i) Tout arc du graphe de f est au-dessous de sa corde.
(ii) L'épigraphe de f est convexe (au sens de partie convexe d'un espace affine).
(iii) Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ et tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}_+^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.
(iv) Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ est croissante sur $I \backslash \{x\}$.

Caractérisations analogues pour une fonction strictement convexe.

Application : <u>Méthode d'interpolation linéaire</u> pour la résolution approchée d'une équation f(x) = 0, avec f croissante et convexe.

2. Continuité et dérivabilité des fonctions convexes

Si I est ouvert et si f est convexe, alors f est continue et admet des dérivées à gauche et à droite qui sont des fonctions croissantes. De plus, le graphe de f est au-dessus de toute tangente à gauche et de toute tangente à droite.

Remarque : Ces propriétés ne s'étendent pas aux extrémités d'un intervalle semi-fermé ou fermé ; d'autre part, f peut ne pas être dérivable en un point intérieur. Prendre f définie sur [0, 2] par f(0) = f(2) = 1, f(x) = - x si $x \in\ ]0, 1]$ et f(x) = x - 2 si $x \in [1, 2[$.

Si f est <u>de classe C^1</u> sur I (à nouveau quelconque), la convexité de f équivaut à chacune des propriétés suivantes :

(v) f' est croissante. (vi) Le graphe de f est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Caractérisations analogues pour une fonction strictement convexe. Exemple : $t \mapsto t^\alpha$.

Application : <u>Méthode de Newton</u> pour la résolution approchée d'une équation f(x) = 0, avec f croissante et convexe.

Exercice 3 : Une fonction convexe dérivable est de classe C^1.

Exercice 4 : Pour un triangle ABC, $\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Cas d'égalité ?

3. Inégalités de convexité

a) Inégalités des moyennes

Soient $a_1, ..., a_n$ des réels strictement positifs. Pour tout α réel, on définit la <u>moyenne d'ordre α</u> des a_i par

$$\boxed{M_\alpha = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha \right)^{1/\alpha} \text{ si } \alpha \neq 0, \text{ et } M_0 = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right)^{1/n}}.$$

Les cas usuels sont $\alpha = 0$ (moyenne géométrique), $\alpha = 1$ (moyenne arithmétique), $\alpha = 2$ (moyenne quadratique), $\alpha = -1$ (moyenne harmonique).

Si $\alpha < \beta$, on a $M_\alpha \leq M_\beta$, avec égalité ssi tous les a_i sont égaux.

Exercice 5 : Les suites $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right)$ et $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \right)$ sont adjacentes. Elles définissent le nombre e.

Exercice 6 : Pour u > 0, v > 0, w > 0, quel est le minimum de $\frac{v+w}{u} + \frac{w+u}{v} + \frac{u+v}{w}$?

b) Inégalités de Hölder et de Minkowski

Soient $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ des réels strictement positifs, $p > 1$ et $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

• <u>Inégalité de Hölder</u> :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{1/q} \text{, avec égalité ssi les suites } \left(a_i^p\right) \text{ et } \left(b_i^q\right) \text{ sont proportionnelles.}}$$

Pour p = 2, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

• <u>Inégalité de Minkowski</u> :

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + b_i\right)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p \right)^{1/p} \text{, avec égalité ssi } (a_i) \text{ et } (b_i) \text{ sont proportionnelles.}}$$

Pour p = 2, on retrouve l'inégalité triangulaire. Application : Normes usuelles dans $\mathbf{R}^n$ et dans $\mathbf{C}^n$.

Bibliographie

ARNAUDIÈS et FRAYSSE, *Cours de mathématiques, tome 2 : analyse*, Dunod
OVAERT et VERLEY, *Analyse, vol.1*, CEDIC/Fernand Nathan