FONCTION RÉCIPROQUE D'UNE FONCTION CONTINUE, D'UNE FONCTION DÉRIVABLE. EXEMPLES. ON SE LIMITERA AUX FONCTIONS NUMÉRIQUES DÉFINIES SUR UN INTERVALLE DE R

Remarques générales

• "Que penser d'une leçon sur les fonctions réciproques qui ne signale pas - ni n'illustre - la symétrie des deux graphes ?" (Rapport du jury 1990)

• "Il faut avoir réfléchi à la pertinence des hypothèses des théorèmes que l'on cite : "Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue et strictement croissante, l'image par f d'un intervalle I est un intervalle J de même nature." — "Est-ce encore vrai si l'on suppose seulement f continue ?" — "Je ne sais pas." Le jury, magnanime, a alors proposé $f(x) = x^2$, $I =]-1, 1[$ …" (Rapport du jury 1992)

Plan

1. <u>Fonction réciproque d'une fonction continue</u>

a) Position du problème

Soit f une fonction numérique continue définie sur un intervalle I de **R**. On sait que f(I) est un intervalle. Si f est injective, f réalise une bijection de I sur f(I) et on peut définir une fonction réciproque f^{-1}, qui est comme f une fonction numérique définie sur un intervalle de **R**. Or les fonctions continues et injectives sur I sont caractérisées par le théorème :

> Les propriétés suivantes sont équivalentes :
> (i) f est continue et injective
> (ii) f est continue et strictement monotone
> (iii) f est strictement monotone et f(I) est un intervalle.

Il suffit donc d'étudier les fonctions continues et strictement monotones sur I.

b) Théorème des fonctions réciproques

> Soit f une fonction numérique continue et strictement monotone sur un intervalle I d'extrémités a et b (dans $\overline{\mathbf{R}}$).
> Alors :
> i) f(I) est un intervalle de même nature que I (ouvert, fermé, semi-ouvert) d'extrémités $\lim_a f$ et $\lim_b f$;
> (ii) f est une bijection de I sur f(I) ;
> (iii) f^{-1} est continue et strictement monotone, de même sens que f ;
> (iv) dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x.

Conséquence : Caractérisation des homéomorphismes d'un intervalle I sur un intervalle J. Dans l'ensemble des intervalles de **R**, il y a cinq classes d'homéomorphie: celles de $\emptyset$, {0}, [0, 1], [0, 1[et]0, 1[.

Application : Nombre de racines d'une équation à partir de l'étude des variations de la fonction correspondante.

c) Exemples

Fonctions réciproques de ln, $x \mapsto x^n$, sin, cos, tan, sh, ch, th.

Exercice 1 : Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$ réalise une bijection de **R** sur]-1, 1[et calculer f^{-1}.

Exercice 2 : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur [a, b]. Montrer que $\int_a^b f = b\,f(b) - a\,f(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}$. Application : calculer $I = \int_{-1}^{-\sqrt{2}/2} \cos^{-1}\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{3}\cos^{-1} x\right)\right) dx$.

Exercice 3 : Soit f une application contractante de **R** dans **R**. Montrer que l'application $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + f(y), y + f(x))$, est bijective.

2. Dérivabilité d'une fonction réciproque

a) Théorème de dérivation d'une fonction réciproque

Soit f un homéomorphisme de l'intervalle I sur l'intervalle J. Alors :
(i) f^{-1} est dérivable en un point x de J ssi f est dérivable en $f^{-1}(x)$, de dérivée non nulle ; dans ce cas, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$;
(ii) f^{-1} est de classe C^k sur J ssi f est de classe C^k sur I et si f' ne s'annule pas.

Applications : Inversion locale d'une fonction numérique. Calcul approché d'une racine a d'une équation par la méthode des approximations successives lorsque $| f'(a) | > 1$.

b) Exemples

Dérivées des fonctions réciproques des fonctions usuelles.

Application : Intégration des fonctions rationnelles.

c) Développement limité d'une fonction réciproque

Soient I un intervalle de **R** contenant 0, et f une application continue et strictement monotone sur I, admettant au voisinage de 0 un développement limité à un ordre n non nul et une partie principale $t \mapsto at$, avec $a \neq 0$. Alors f^{-1} admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre n et une partie principale $t \mapsto \frac{1}{a} t$.

Pratiquement, le développement limité de f^{-1} s'obtient à partir de l'égalité $f^{-1} \circ f(t) = t$. En particulier, si $f(t) = t + \alpha t^n + o(t^n)$, alors $f^{-1}(t) = t - \alpha t^n + o(t^n)$.

Exercice 4 : Montrer que pour tout $x \geq 0$, l'équation $y^3 + xy = 1$ a une solution unique et que l'application $x \mapsto y$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^+$; donner son développement limité à l'ordre trois en 0.

Exercice 5 : Montrer que $\tan^{-1} a + \tan^{-1} b = \tan^{-1} \frac{a+b}{1-ab} + k\pi$, avec $k = 0$ si $ab < 1$, $k = 1$ si $ab > 1$ et $a > 0$, $k = -1$ si $ab > 1$ et $a < 0$. En déduire l'égalité $\pi = 16 \tan^{-1} \frac{1}{5} - 4 \tan^{-1} \frac{1}{239}$ et un calcul de π.

Bibliographie

LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 2,* Dunod
RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX, *Cours de mathématiques spéciales, tome 3*, Masson
MONIER, *Analyse tome 1*, Dunod