DÉFINITION DE L'INTÉGRALE SUR UN INTERVALLE COMPACT D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE CONTINUE. PROPRIÉTÉS

Remarques générales

Ne pas se lancer dans une théorie générale de l'intégration. Suivre le titre et ne traiter que le cas des fonctions numériques continues. Il faudra adapter les énoncés et démonstrations qui se trouvent dans les livres ; on pourra souvent les simplifier en utilisant l'hypothèse de continuité.

Plan

On n'envisage que des fonctions numériques *continues* définies sur un intervalle compact [a, b]. Il est toujours sous-entendu que a < b (indispensable pour les inégalités). On suppose connues la définition et les propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier sur [a, b].

1. Intégrale de Riemann d'une fonction continue

a) Définition

Théorème et définition : Soit f une fonction numérique continue sur [a, b]. Alors :
(i) il existe une suite (φ_n) de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur [a, b] ;
(ii) la suite $\left(\int_a^b \varphi_n\right)$ est convergente et sa limite I ne dépend que de f.
Le nombre I est appelé intégrale de f sur [a, b] et noté $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)\,dt$.

b) Autre point de vue : sommes de Riemann

Étant données une subdivision $\sigma = (x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b)$ de [a, b] et une suite $\xi = (\xi_i)_{1\le i\le n}$ de points de [a, b] telle que, pour tout i, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, on pose $S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$.

Théorème : Soit f une fonction numérique continue sur [a, b]. Alors $S(f, \sigma, \xi)$ admet une limite finie lorsque le pas de la subdivision tend vers 0 et cette limite est égale à $\int_a^b f$.

Application : calcul approché de $\int_a^b f$ par la méthode des rectangles à gauche, la méthode des rectangles à droite, la méthode du point milieu (ou des tangentes).

Exercice 1 : Soit $\alpha \ne \pm 1$; calculer $I_\alpha = \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2)\,dt$.

c) Propriétés

• Interprétation géométrique.
• Additivité par rapport aux intervalles.
• Linéarité.
• Positivité : Si f est continue et positive sur [a, b] (a < b), alors $\int_a^b f \ge 0$, avec égalité ssi f = 0. En particulier, $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.
• Inégalités de Schwarz (pour f et g continues, égalité ssi f et g sont colinéaires) et de Minkowski (pour f et g continues, égalité ssi f et g sont $\mathbf{R}^+$-colinéaires).
• $\|f\|_1 = \int_a^b |f|$ et $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2}$ définissent des normes sur l'espace vectoriel $C^0([a, b])$ des fonctions numériques continues sur [a, b]. Cet espace, qui est complet pour la norme de la convergence uniforme, n'est complet ni pour $\|.\|_1$, ni pour $\|.\|_2$. On a par ailleurs les inégalités $\|f\|_1 \le \sqrt{b-a}\,\|f\|_2 \le (b-a)\|f\|_\infty$.

• Théorèmes de la moyenne.
• Intégrale de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Intégration terme à terme d'une série uniformément convergente de fonctions continues.

Exercice 2 : Soit f continue sur [a, b]. Montrer que $\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f|^n\right)^{1/n} = \| f \|_\infty$.

2. Intégration des fonctions continues

a) Existence de primitives pour une fonction continue

Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral :
Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I quelconque et soit a un point de I. Alors :
(i) la fonction F : $x \mapsto \int_a^x f$ est de classe C^1 sur I et c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a ;
(ii) l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des F + C, où C décrit **R** ;
(iii) pour tous points a et b de I et toute primitive G de f sur I, on a $\int_a^b f = G(b) - G(a)$.

Remarque : Pour une fonction continue, l'intégration est l'opération inverse de la dérivation. Ce n'est plus vrai en général : il existe des fonctions intégrables qui n'admettent pas de primitives et il existe des fonctions dérivables dont la dérivée n'est pas intégrable.

b) Calcul des primitives

• *Intégration par parties* :

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur [a, b]. Alors $\boxed{\int_a^b f\,g' = [f\,g]_a^b - \int_a^b f'\,g}$.

• *Changement de variables* :

Soit φ une fonction de classe C^1 sur [a, b] et f une fonction continue sur φ([a, b]). Alors $\boxed{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \int_a^b (f \circ \varphi)\,\varphi'}$.

Exercice 3 : Soit f de classe C^1 sur [0, 1] telle que f(0) = f(1) = 0. Montrer que $\left(\int_0^1 f\right)^2 \le \frac{1}{12}\int_0^1 f'^2$.

Exercice 4 : Montrer que si f est continue sur [a, b], alors $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0$ (commencer par f en escalier).

Exercice 5 : Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi\ln 2}{8}$ (faire le changement de variable x = tan u).

Exercice 6 : Calculer $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$.

Bibliographie

RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX, *Cours de mathématiques spéciales, tome 3*, Masson
LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 2*, Dunod