INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

Remarques générales

Programme : Passage à la limite uniforme dans les intégrales de fonctions continues sur un segment : application à la dérivation de la limite d'une suite de fonctions de classe C^1. Exemples de passage à la limite dans les intégrales impropres. Continuité et intégration des fonctions de la forme $x \mapsto \int_a^b f(t, x)\,dt$, où f est continue ; dérivation lorsqu'en outre $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue. Exemples de fonctions définies par des intégrales.

Plan

1. Intégrales sur un intervalle compact

a) Cas d'un paramètre entier

Soient a et b deux réels et (f_n) une suite d'applications <u>continues</u> de [a, b] dans **K**.

Si (f_n) converge uniformément sur [a, b] vers une application f, alors f est intégrable sur [a, b] et $\int_a^b f = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n$. De plus, pour tout $c \in [a, b]$, la suite des primitives $\left(t \mapsto \int_c^t f_n\right)$ converge uniformément sur [a, b] vers l'application $t \mapsto \int_c^t f$.

Application : Soient I un intervalle de **R** et (f_n) une suite d'applications de classe C^1 de I dans **K**. Si la suite des dérivées $\left(f'_n\right)$ converge uniformément sur I vers une application g, et s'il existe $c \in I$ tel que la suite $(f_n(c))$ converge, alors (f_n) converge uniformément sur tout compact de I vers une fonction f, f est dérivable sur I et f' = g.

b) Cas d'un paramètre réel

Soient deux réels a et b, I un intervalle de **R**, $f: [a, b] \times I \to \mathbf{K}$ une application <u>continue</u>. On s'intéresse aux propriétés de l'application $F : I \to \mathbf{K}$ définie par $F(x) = \int_a^b f(t, x)\,dt$.

(i) *Continuité :* F est continue sur I. (ii) *Intégrabilité :* F est intégrable sur tout segment $[c, d] \subset I$ et $\int_c^d F(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(t, x)\,dx\right) dt$. (iii) *Dérivabilité :* Si f admet une dérivée partielle par rapport à x et si $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $[a, b] \times I$, alors F est de classe C^1 sur I et $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\,dt$.

Application 1 : Pour x > -1, calculer $F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + x\sin^2 t)\,dt$.

Application 2 : Pour $x \neq 1$, calculer $F(x) = \int_1^2 t^x \ln t\,dt$.

Application 3 : Pour 1 < a < b, calculer $I = \int_0^{\pi} \ln \frac{b - \cos t}{a - \cos t}\,dt$.

2. Intégrales généralisées

a) Préliminaires

Pour une famille d'intégrales généralisées dépendant d'un paramètre (entier ou réel), notions de convergence simple et de convergence uniforme. Conditions suffisantes de convergence uniforme : critère de Cauchy, convergence normale, règle d'Abel.

b) Cas d'un paramètre entier

Soient $a \in \mathbf{R}$, $b \in \overline{\mathbf{R}}$, et (f_n) une suite d'applications <u>continues</u> de $[a, b[$ dans $\mathbf{K}$ telle que l'intégrale $\int_a^b f_n$ soit <u>simplement convergente</u>.

Si (f_n) converge uniformément vers une application f sur tout segment $[a, c] \subset [a, b[$, et si l'intégrale $\int_a^b f_n$ est uniformément convergente, alors l'intégrale $\int_a^b f$ est convergente et $\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n$

Application : Cas des séries. Exemple : $\int_0^1 -\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

c) Cas d'un paramètre réel

Soient $a \in \mathbf{R}$, $b \in \overline{\mathbf{R}}$, I un intervalle de $\mathbf{R}$, $f: [a, b[\times I \to \mathbf{K}$ une application <u>continue</u> telle que l'intégrale $\int_a^b f(t, x)\,dt$ soit <u>simplement convergente</u> sur I. On s'intéresse aux propriétés de l'application $F : I \to \mathbf{K}$ définie par $F(x) = \int_a^b f(t, x)\,dt$.

(i) *Continuité :* Si l'intégrale $\int_a^b f(t, x)\,dt$ est uniformément convergente sur I, alors F est continue sur I. (ii) *Intégrabilité :* Si l'intégrale $\int_a^b f(t, x)\,dt$ est uniformément convergente sur un segment $[c, d] \subset I$, alors F est intégrable sur [c, d], l'intégrale $\int_a^b \left(\int_c^d f(t, x)\,dx\right) dt$ est convergente et $\int_c^d F(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(t, x)\,dx\right) dt$ (iii) *Dérivabilité :* Si f admet une dérivée partielle par rapport à x, si $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $[a, b[\times I$ et si l'intégrale $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\,dt$ est uniformément convergente sur I, alors F est de classe C^1 sur I et $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\,dt$.

Application 1 : La fonction $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\Gamma'(1) = -\gamma$, où γ est la constante d'Euler.

Application 2 : En étudiant la fonction $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$, montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Application 3 : En étudiant la fonction $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin t}{t}\,dt$, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

Bibliographie

LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 2,* Dunod
RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX, *Cours de mathématiques spéciales, tomes 3 et 4,* Masson
GRAMAIN, *Intégration,* Hermann