ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE 2 : x" + a(t) x' + b(t) = c(t), OÙ a, b, c SONT DES FONCTIONS CONTINUES

Remarques générales

• On peut supposer connu le théorème de Cauchy-Lipschitz pour un système linéaire d'ordre 1 (théorème admis conformément au programme) ; on peut également le démontrer (voir LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS).

• Les plus courageux pourront présenter des applications (problèmes de mécanique, fonctions de Bessel, ...).

Plan

1. <u>Définitions et notations</u>

• **K** = **R** ou **C** ; I intervalle de **R** ; a, b, c applications continues de I dans **K**.
• <u>Equation différentielle linéaire d'ordre 2</u> : (L) $\boxed{x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t)}$
• <u>Solution de (L)</u> : toute application f de I dans **K**, deux fois dérivable sur I et telle que pour tout t de I on ait $f''(t) + a(t)\,f'(t) + b(t)\,f(t) = c(t)$.
• <u>Equation homogène associée</u> : (H) $\boxed{x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = 0}$
• <u>Système différentiel d'ordre 1 associé</u> :
(S) $\boxed{X' = A(t)\,X + B(t)}$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$.

2. <u>Résolution de (H)</u>

a) Structure algébrique de l'ensemble des solutions de (H)

• $\boxed{\text{L'ensemble S(H) des solutions de (H) est un } \mathbf{K}\text{-espace vectoriel de dimension 2}}$. Toute base de S(H) est appelée <u>système fondamental de solutions</u>. Il existe une unique solution telle que x et x' prennent des valeurs données en un point de I donné *(problème de Cauchy).*

• Etant donnés deux éléments f_1 et f_2 de S(H), les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) (f_1, f_2) est un système fondamental de solutions
(ii) il existe t dans I tel que $\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0$
(iii) pour tout t de I, on a $\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0$
Le déterminant ci-dessus est appelé <u>wronskien</u> de (f_1, f_2).

b) Techniques pour déterminer un système fondamental de solutions

• On peut chercher des solutions d'un type particulier (polynômes, exponentielles, puissances) ou plus généralement des solutions développables en série entière.

• Lorsqu'on connaît une solution f_1 ne s'annulant pas sur I, le changement de fonction inconnue $x = f_1 z$ permet de se ramener à une équation linéaire d'ordre 1 en z'.

Exemple 1 : $(t + 1)\,x'' - x' - t\,x = 0$
Exemple 2 : $(t^2 + t)\,x'' + (t - 1)\,x' - x = 0$
Exemple 3 : $x'' + t\,x' + x = 0$

3. <u>Résolution de (L)</u>

a) Structure algébrique de l'ensemble des solutions de (L)

$\boxed{\text{L'ensemble S(L) des solutions de (L) est un } \mathbf{K}\text{-espace affine de dimension 2, de direction S(H)}}$.

b) Technique pour déterminer une solution particulière

Soit (f_1, f_2) un système fondamental de solutions de (H). Alors f = λ_1 f_1 + λ_2 f_2, où λ_1 et λ_2 sont deux fonctions inconnues, est solution de (L) si $\begin{cases} \lambda_1' f_1 + \lambda_2' f_2 = 0 \\ \lambda_1' f_1' + \lambda_2' f_2' = c(t) \end{cases}$, ce qui permet de déterminer λ_1 et λ_2 par deux quadratures *(méthode de variation des constantes).*

Exemple 4: $(t + 1) x'' - x' - t x = e^{-t}$

4. <u>Cas où a et b sont des constantes</u>

a) Résolution de (H)

• L'équation (EC) $\boxed{r^2 + a r + b = 0}$ est appelée <u>équation caractéristique</u> de (H).

• Lorsque **K** = **C**, un système fondamental de solutions de (H) est :

$(e^{r_1 t}, e^{r_2 t})$ si (EC) admet deux racines distinctes r_1 et r_2

$(e^{rt}, t\,e^{rt})$ si (EC) admet une racine double $r = r_1 = r_2$

• Lorsque **K** = **R**, un système fondamental de solutions de (H) est :

$(e^{r_1 t}, e^{r_2 t})$ si (EC) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2

$(e^{rt}, t\,e^{rt})$ si (EC) admet une racine double $r = r_1 = r_2$

$(e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t)$ si (EC) admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$

b) Résolution de (L)

Outre la méthode de variation des constantes, on dispose d'une autre technique lorsque le second membre est une exponentielle-polynôme :

Si $c(t) = e^{mt} P(t)$, où $P \in \mathbf{K}[X]$, on cherche une solution particulière sous la forme $f_0 = e^{mt} Q(t)$, avec :
degré de Q = degré de P + ordre de multiplicité de m dans (EC).

Exemple 5 : $x'' - 3 x' + 2 x = (6 t - 1) e^t$
Exemple 6 : $x'' + 4 x' + 5 x = t e^{-2t} \sin t$
Exemple 7 : $t^2 x'' + \alpha t x' + \beta x = 0$ *(équation d'Euler)*

Bibliographie

LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 4,* Dunod
LEHNING, *Analyse fonctionnelle*, Masson
MASCART et STOKA, *Fonctions d'une variable réelle, tome 3 : équations différentielles*, PUF
GEFFROY, Equations différentielles, PUF