ESPÉRANCE, VARIANCE, COVARIANCE ; LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES

Remarques générales

• La principale difficulté est qu'il faut traiter à la fois le cas des variables aléatoires discrètes et celui des variables continues. Ne pas hésiter à admettre certains résultats soulevant des problèmes théoriques difficiles.

• Ne pas oublier de commenter oralement le sens des définitions et résultats qui sont donnés abstraitement dans le plan. Prévoir des applications concrètes.

Plan

1. Espérance

a) Définitions

• Soit X une variable aléatoire réelle (v.a.r.) discrète prenant les valeurs x_1, x_2, ... On dit que X <u>admet une espérance</u> lorsque la série $\sum x_i P(X = x_i)$ est absolument convergente. Dans ce cas, la somme de cette série est appelée <u>espérance</u> de X et notée E(X).
• Soit X une v.a.r. continue ayant une densité de probabilité f. On dit que X <u>admet une espérance</u> lorsque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ est convergente. La valeur de cette intégrale est alors appelée <u>espérance</u> de X et notée E(X).

b) Propriétés

• Si X est une v.a.r. discrète admettant une espérance et si φ est une application quelconque de **R** dans **R** telle que φ(X) admette une espérance, alors $\boxed{E(\varphi(X)) = \sum \varphi(x_i) P(X = x_i)}$. Si X est une v.a.r. continue admettant une espérance et si φ est une application de **R** dans **R** continue sur X(Ω) telle que φ(X) admette une espérance, alors $\boxed{E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f(t)\,dt}$.
• Si X et Y admettent une espérance, alors X + Y admet une espérance et $\boxed{E(X + Y) = E(X) + E(Y)}$. Si de plus X et Y sont indépendantes, alors XY admet une espérance et $\boxed{E(XY) = E(X)E(Y)}$.
• Si X admet une espérance, alors aX + b admet une espérance et $\boxed{E(aX + b) = aE(X) + b}$.

2. Variance et covariance

a) Définitions

• Soit X une v.a.r.. Si X^2 (et par suite X) admet une espérance, on dit que X <u>admet une variance</u>. On appelle alors <u>variance</u> de X et on note V(X) le nombre $E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$.
• Si X admet une variance, on appelle <u>écart-type</u> de X et on note σ(X) le nombre $\sqrt{V(X)}$.
• Soient X et Y deux v.a.r.. Si X et Y admettent une variance (il en résulte que XY admet une espérance), on dit que le couple (X, Y) <u>admet une covariance</u>. On appelle alors <u>covariance</u> de (X, Y) et on note Cov(X, Y) le nombre E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).
• Si X et Y admettent une variance non nulle, on appelle <u>coefficient de corrélation linéaire</u> de (X, Y) et on note ρ(X, Y) le nombre $\dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

b) Propriétés

• Si X admet une variance, alors aX + b admet une variance et $\boxed{V(aX + b) = a^2V(X)}$.

Application : Si X admet une variance, la v.a.r. $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ a pour espérance 0 et pour variance 1 ; on l'appelle <u>variable centrée réduite</u> associée à X.

• Si X et Y admettent une variance, alors X + Y admet une variance, $\boxed{V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)}$ et $\boxed{|\mathrm{Cov}(X, Y)| \le \sigma(X)\sigma(Y)}$.

Si de plus X et Y sont indépendantes, alors $\boxed{V(X + Y) = V(X) + V(Y)}$ et $\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) = 0}$.

3. Cas des lois de probabilité usuelles

Nom	Valeurs	Loi ou densité	Espérance	Variance
Loi de Bernouilli (1, p)	{0, 1}	$P(X = 0) = p$ $P(X = 1) = q$	p	pq
Loi binomiale (n, p)	{1, …, n}	$P(X = k) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k}$	np	npq
Loi hypergéométrique (N, n, p)	incluses dans {1, …, n}	$P(X = k) = \dfrac{C_{Np}^k\, C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n}$	np	$npq\dfrac{N-n}{N-1}$
Loi de Poisson (λ)	**N**	$P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
Loi uniforme ([a, b])	[a, b]	$f(x) = 0$ si $x \notin [a, b]$ $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ si $x \in [a, b]$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Loi exponentielle (λ)	$\mathbf{R}_+$	$f(x) = 0$ si $x < 0$ $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \ge 0$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Loi de Laplace-Gauss (m, σ)	**R**	$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2

4. Loi faible des grands nombres

a) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une v.a.r. admettant une variance. Alors, pour tout ε > 0, on a $P(|X - E(X)| \ge \varepsilon) \le \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

b) Loi faible des grands nombres

Soit (X_n) une suite de v.a.r. de même loi, deux à deux indépendantes et admettant une variance. Alors, si on note m leur espérance commune et $S_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$, on a pour tout ε > 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|S_n - m| \ge \varepsilon) = 0$.

Remarque 1 : On dit alors que (S_n) <u>converge en probabilité</u> vers la v.a.r. certaine égale à m.
Remarque 2 : Le résultat subsiste si l'on suppose seulement que les v.a.r. admettent une espérance mais la démonstration est plus difficile (voir FELLER).

5. Applications
(Prévoir ici quelques exercices concrets permettant de mettre en oeuvre les notions et résultats de cette leçon.)

Bibliographie

LEBOEUF, ROQUE et GUÉGAND, *Cours de probabilités et statistiques*, Ellipses
FELLER, *An introduction to probability theory and its applications*, Wiley