# Chapitre 5 - Similitudes

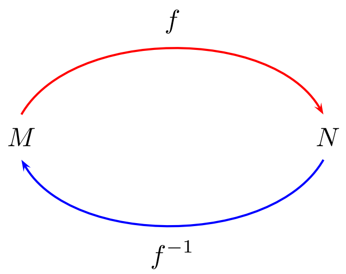
## 1 Généralités sur les transformations du plan

### 1.1 Définitions

**Définition 1**
*Lorsqu'on associe à un point $M$ du plan un unique point $N$, on a alors défini une application du plan dans lui-même.*

**Définition 2**
*Une application $f$ du plan dans lui-même est dite bijective lorsque tout point $N$ du plan est l'image par $f$ d'un unique point $M$.*

**Définition 3**
*Une bijection du plan dans lui-même est appelée une transformation du plan.*




Ici, on a le schéma d'une transformation $f$ du plan telle que $f(M) = N$.

Il y a aussi une transformation qui associe à $N$ le point $M$.
On l'appelle la transformation réciproque de $f$ et on la note $f^{-1}$
On a alors $M = f^{-1}(N)$

Si $f$ est une transformation, $f(M) = N$ équivaut à $N = f^{-1}(N)$

**Définition 4**
*On appelle identité du plan, et on note $Id$, la transformation qui à tout point $M$ associe lui-même.*
*On a $Id(M) = M$ pour tout $M$ du plan.*
*De plus, $Id^{-1} = Id$*

### 1.2 Composée de transformations

**Définition 5**
*$f$ et $g$ étant deux transformations, la trasformation $f \circ g$ est définie par :*
*pour tout point $M$ du plan, $(g \circ f)(M) = g(f(M))$*

**Propriété 1**
*Si $f$ et $g$ transforment les droites en droites, les cercles en cercles, conservent les distances, les angles le parallélisme, l'orthogonalité, les barycentres, les aires, alors il en est de même pour $g \circ f$*

**Théorème 1**
*Si $f$ multiplie les distances par un réel $k > 0$ et si $g$ multiplie les distances par un réel $k' > 0$ alors $g \circ f$ multiplie les distances par $kk'$*

Preuve :

Soient 6 points $A, B, A', B', A''$ et $B''$ tels que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$ ainsi que $g(A') = A''$ et $g(B') = B''$
On a alors $A'B' = kAB$ par hypothèse ainsi que $A''B'' = k'A'B'$.
Et donc $A''B'' = kk'AB$ donc $g \circ f$ multiplie les distances par $kk'$

# 2 Similtudes

Dans les chapitres suivants, les angles orientés seront identifiés par leur mesure principale.
Quand on lira $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$, il faudra comprendre $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta (2\pi)$

**Définition 6**
*On appelle similitude plane toute transformation du plan qui conserve les rapports de distances.*
*c'est-à-dire, si $A, B, C, D, A', B', C'$ et $D'$ sont des points du plan tels que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ , $f(C) = C'$ et $f(D) = D'$ alors $\dfrac{A'B'}{C'D'} = \dfrac{AB}{CD}$*

**Exemple 1**

*Les rotations, les homothéties, les translations, les symétries centrales, les réflexions, l'identité sont des similitudes planes.*

**Remarque 1** *On dit plus simplement similitudes pour similitudes planes*

**Théorème 2**
*Une transformation $f$ du plan est une similitude si et seulement si elle multiplie les distances par un réel $k$ appelé rapport de la similitude $f$*

Preuve
$\dfrac{A'B'}{C'D'} = \dfrac{AB}{CD} \iff \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{C'D'}{CD}$
En posant $k = \dfrac{C'D'}{CD}$ on a , pour tout couple de points $A$ et $B$ du plan tels que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$, $\dfrac{A'B'}{AB} = k$
et donc $A'B' = kAB$
Les distances sont bien multipliées par $k$

Réciproquement :
Si les distances sont multipliées par $k$ alors $A'B' = kAB$ et $C'D' = kCD$.
Alors $\dfrac{A'B'}{AB} = k$ et $\dfrac{C'D'}{CD} = k$ et donc $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{C'D'}{CD}$ donc $f$ conserve les rapports de distances donc $f$ est une similitude.

**Théorème 3**
*La composée d'une similitude de rapport $k$ et d'une similitude de rapport $k'$ est une similtude de rapport $kk'$*

Preuve
C'est une conséquence directe des théorèmes 1 et 2

**Théorème 4**
*La réciproque d'une similitude de rapport $k$ est une similtude de rapport $\dfrac{1}{k}$*

Preuve
C'est une conséquence directe du théorème 3 puisque l'identité du plan peut être considérée comme une similitude de rapport 1.

**Théorème 5**
*Une similitude conserve les angles géométriques :*
*si $A, B, C, A', B'$ et $C'$ sont des points distincts du plan tels que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$*
*alors $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.*

Preuve :

Si les points $A, B$ et $C$ sont alignés, $A', B'$ et $C'$ le sont aussi en raison de l'inégalité triangulaire.
Une similitude conserve les rapports de distances donc elle transforme tout triangle $ABC$ est un triangle $A'B'C'$ semblable à $ABC$.

Quand deux triangles sont semblables, les angles correspondants sont égaux donc les angles géométriques sont conservés.

**Remarque 2** *Ce résultat amène à deux familles de similitudes.*

**Définition 7**

- *On appelle* ***similtude directe*** *une similitude qui conserve les angles orientés.*
  *Si* $A, B, C, A', B'$ *et* $C'$ *sont des points distincts du plan tels que* $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ *et* $f(C) = C'$ *alors* $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
- *On appelle* ***similtude indirecte*** *une similitude qui transforme un angle orienté en son opposé.*
  *Si* $A, B, C, A', B'$ *et* $C'$ *sont des points distincts du plan tels que* $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ *et* $f(C) = C'$ *alors* $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

**Exemple 2**

*Les rotations, les homothéties, les translations, les symétries centrales, l'identité sont des similitudes directes.*
*Les réflexions sont des similtudes indirectes.*

**Propriété 2**
*Une similitude transforme toute figure en une figure semblable.*

## 3 Similitudes directes : éléments caractéristiques

**Théorème 6**
*Soit* $f$ *une similitude directe.*
*Pour tout couple de points distincts* $A$ *et* $B$ *tels que* $f(A) = A'$ *et* $f(B) = B'$ *alors l'angle* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ *est constant.*
*On l'appelle l'angle de* $f$.

Preuve :

**Théorème 7**
*Une similtude directe* $f$ *a une écriture complexe de la forme* $z' = az + b$ $(a \neq 0\ )$ .
*Réciproquement, pour tous complexes* $a$ *et* $b$ $(\ a \neq 0)$, $z' = az + b$ *décrit une similitude directe de rapport* $k = |a|$ *et d'angle* $\theta = arg(a)$, *on a alors* $z' = ke^{i\theta}z + b$

Preuve :

**Théorème 8**
*Les translations et les rotations sont les seules isométries directes.*
*On les appelle des déplacements.*

Preuve :

**Théorème 9**
*Si la similitude directe $f$ d'écriture complexe $z' = az + b$ n'est pas une translation ($a \neq 1$ ), elle admet un unique point invariant $\Omega$ appelé centre de $f$.*

Preuve :
Un point invariant , ou point fixe, est tel que $f(\Omega) = \Omega$

En résolvant l'équation $z' = z$, on obtient $z = az + b$ qui a une unique solution $z = \dfrac{b}{1-a}$ si $a \neq 1$ c'est-à-dire si $f$ n'est pas une translation.

# 4 Etude de la nature de la similitude directe

## 5 Similitudes directes : propriétés

**Théorème 10**
*Soit $f$ une similitude directe de rapport $k$ et d'angle $\theta$.*
*Si $f$ n'est pas une translation ($a \neq 1$) et a pour centre $\Omega(\omega)$ alors $f = h \circ r = r \circ h$ où $h$ est l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$ et $r$ la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$.*
*Cette décomposition est appelée **forme réduite** de $f$*

Preuve :

**Théorème 11**
*Soient $A, B, A'$ et $B'$ quatre points du plan complexe tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$.*
*Il existe une unique similitude directe $f$ telle que $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$*

Preuve :

**Théorème 12**
*Soit $f$ une similitude directe de rapport $k$ et d'angle $\theta$ et $g$ une similitude directe de rapport $k'$ et d'angle $\theta'$ .*
*Alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des similitudes directes de rapport $kk'$ et d'angle $\theta + \theta'$.*

*En général, $f \circ g$ est différente de $g \circ f$.*

Preuve :

**Théorème 13**
*Si $f$ est la similitude directe de centre $\Omega$, de rapport $k$ et d'angle $\theta$, alors sa réciproque $f^{-1}$ est la similitude directe de même centre $\Omega$, de rapport $\dfrac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.*

Preuve :
Un point invariant , ou point fixe, est tel que $f(\Omega) = \Omega$

En résolvant l'équation $z' = z$, on obtient $z = az + b$ qui a une unique solution $z = \dfrac{b}{1-a}$ si $a \neq 1$ c'est-à-dire si $f$ n'est pas une translation.

## 6 Similitudes indirectes

**Théorème 14**
*La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.*
*La réciproque d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.*

Preuve :

**Théorème 15**
*Une similitude $f$ qui a deux points fixes distincts $A$ et $B$ ne peut être que l'identité ou la relflexion d'axe $(AB)$*

Preuve :

**Théorème 16**
*Une similitude indirecte $g$ a une écriture complexe de la forme $z' = a\bar{z} + b$ ( $a \neq 0$ ).*
*Réciproquement, pour tous complexes $a$ et $b$ ( $a \neq 0$ ) , $z' = a\bar{z} + b$ décrit une similitude indirecte de rapport $k = |a|$.*

*En général, $f \circ g$ est différente de $g \circ f$.*

Preuve :

**Définition 8**
*On appelle **antidéplacements** les isométries indirectes .*

**Théorème 17**
*Un antidéplacement quia au moins un point invariant est une réflexion.*

Preuve :